

- 1) Durgun halden 120V' luk potansiyel farkına kadar ivmelendirilen
a) bir protonun,
b) bir elektronun süratini hesaplayınız.

$$W = \Delta K = q |\Delta V|$$

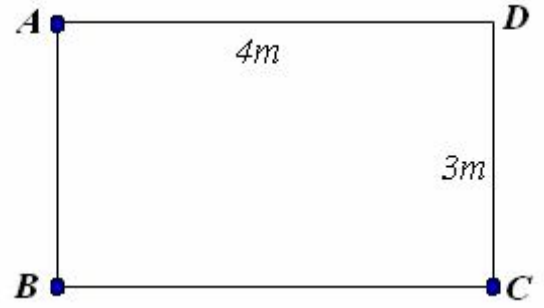
$$\frac{1}{2} m v^2 = e (120V) = 1,92 \times 10^{-17} \text{ J}$$

$$v = \sqrt{\frac{3,84 \times 10^{-17} \text{ J}}{m}}$$

a) $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ $v = 1,52 \times 10^5 \text{ m/s}$

b) $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ $v = 6,49 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

2) Şekil 1'deki ABCD dikdörtgeninin A köşesine $0.2 \mu\text{C}$, B köşesine $-3 \mu\text{C}$, C köşesine $3 \mu\text{C}$ 'luk yükler yerleştirilmiştir. D köşesindeki elektriksel potansiyeli bulunuz.



Şekil 1

A köşesindeki yükün D de oluşturacağı elektriksel potansiyel,

$$V_1 = 9 \times 10^9 \cdot \frac{2 \times 10^{-7}}{4} = 450 \text{ V}$$

B köşesindeki yükün D de oluşturacağı potansiyel,

$$V_2 = 9 \times 10^9 \cdot \frac{(-3 \times 10^{-6})}{5} = -5400 \text{ V}$$

C noktasındaki yükün D de oluşturacağı potansiyel

$$V_3 = 9 \times 10^9 \cdot \frac{3 \times 10^{-6}}{3} = 9000 \text{ V}$$

$$V = 450 + (-5400) + 9000 = 4050 \text{ V} \quad \text{bulunur.}$$

3) Bir bölgedeki elektrik alanı $\vec{E} = 5x^2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ (kV/m) ile verilmektedir. A noktası orijinde bulunuyor ise,

a) B noktası (0,0,5) m için,

b) B noktası (4,3,0) m için, ($V_B - V_A$) potansiyel farkını bulunuz.

$$\vec{E} = 5x^2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} \left(\frac{kV}{m} \right)$$

A noktası orijinde olduğundan $A(0,0,0)$ 'dir.

a) B noktası (0,0,5) m ise;

b) B noktası (4,3,0) m ise

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{bağıntısından, } d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

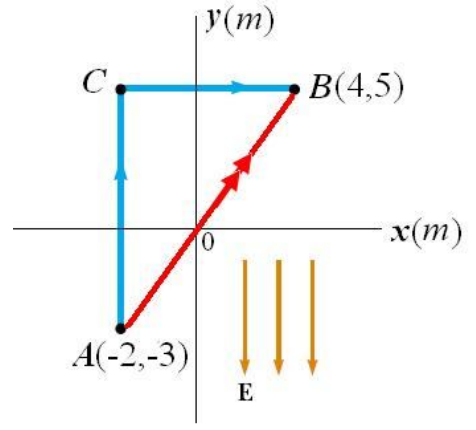
$$\Delta V = - \left[\int E_x dx + \int E_y dy + \int E_z dz \right]$$

$$V_B - V_A = - \int_A^B E_x dx - \int_A^B E_y dy - \int_A^B E_z dz$$

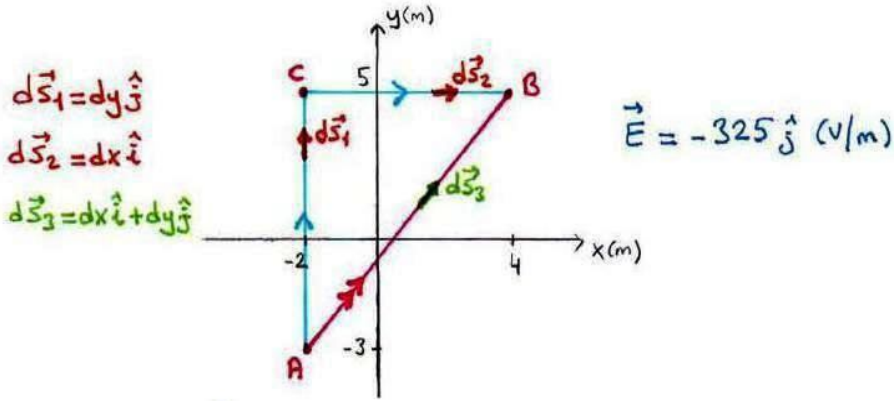
$$a) V_B - V_A = - \left[\int_0^0 5x^2 dx - \int_0^0 3 dy + \int_0^5 2 dz \right] = - 2(z) \Big|_0^5 = -10V$$

$$b) V_B - V_A = - \left[\int_0^4 5x^2 dx - \int_0^3 3 dy + \int_0^0 2 dz \right] = - \left[\frac{5x^3}{3} \Big|_0^4 - (3y) \Big|_0^3 \right] = -97,6V$$

4) 325 (V/m) şiddetindeki düzgün bir elektrik alan $-y$ eksenini doğrultusunda uygulanmaktadır. Şekil 2'deki A ve B noktalarının koordinatları sırasıyla $(-2, -3) \text{ m}$ ve $(4, 5) \text{ m}$ 'dir. $(V_B - V_A)$ potansiyel farkını, doğrusal olarak verilen ACB ve AB yolları üzerinden hesaplayınız.



Şekil 2



$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

ACB yolu için:

$$V_B - V_A = - \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 - \int_C^B \vec{E} \cdot d\vec{S}_2$$

$$V_B - V_A = - \int_A^C (-325 \hat{j}) \cdot dy \hat{j} - \int_C^B (-325 \hat{j}) \cdot dx \hat{i} \quad (\hat{j} \cdot \hat{i} = 0)$$

$$V_B - V_A = 325 \int_A^C dy$$

$$V_B - V_A = 325 \int_{-3}^5 dy = 325 [y]_{-3}^5 = 325 [5 - (-3)]$$

$$V_B - V_A = 2600 \text{ (V)}$$

AB yolu için:

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}_3$$

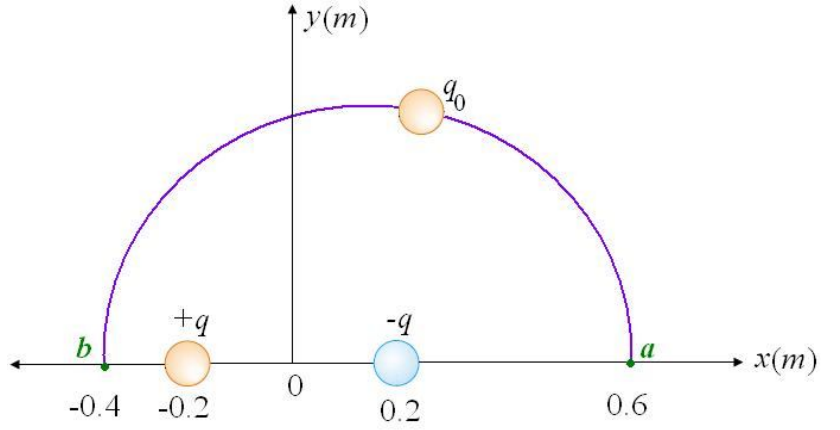
$$V_B - V_A = - \int_A^B (-325 \hat{j}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j})$$

$$V_B - V_A = 325 \int_A^B dy$$

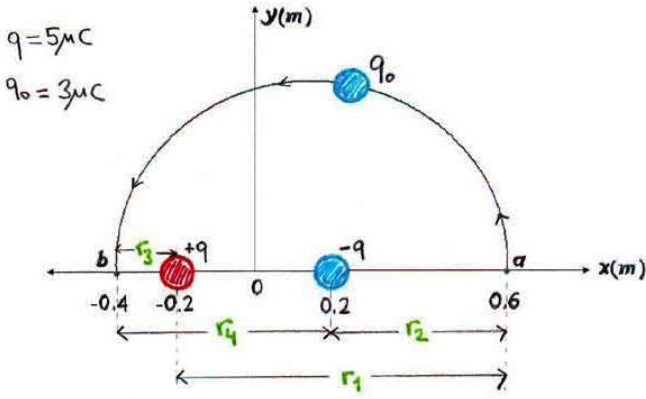
$$V_B - V_A = 325 \int_{-3}^5 dy = 325 [y]_{-3}^5$$

$$\boxed{V_B - V_A = 2600(V)}$$

5) Bir elektrik dipolü Şekil 3'deki gibi $x = -0.2 \text{ m}$ 'deki $+5 \mu\text{C}$ yükü ile $x = 0.2 \text{ m}$ 'deki $-5 \mu\text{C}$ yükünden oluşmaktadır. $q_0 = 3 \mu\text{C}$ 'luk bir deneme yükü, $x = 0.6 \text{ m}$ olan noktadan $x = -0.4 \text{ m}$ olan noktaya, yarıçapı 0.5 m olan ve y -eksenini kesen yarım çember şeklindeki yolu izleyerek sabit hızla taşınmıştır. Deneme yükünü hareket ettirmek için ne kadar iş yapılmıştır?



Şekil 3



$$W_{a \rightarrow b} = \Delta U = q_0 \Delta V = q_0 (V_b - V_a)$$

$$W_{a \rightarrow b} = 3 \cdot 10^{-6} [150.000 - (-56250)]$$

$$W_{a \rightarrow b} \approx 0,62 \text{ (J)}$$

$$V = k \frac{q}{r}$$

$$V_a = k \frac{q}{r_1} - k \frac{q}{r_2}$$

$$V_a = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{5 \cdot 10^{-6}}{0,8} - \frac{5 \cdot 10^{-6}}{0,4} \right)$$

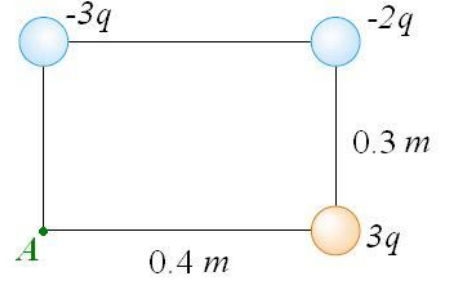
$$V_a = -56250 \text{ (V)}$$

$$V_b = k \frac{q}{r_3} - k \frac{q}{r_4}$$

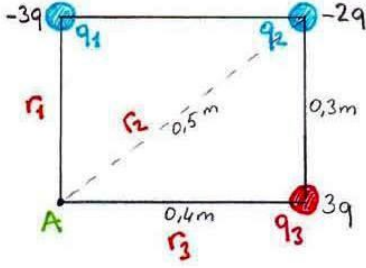
$$V_b = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{5 \cdot 10^{-6}}{0,2} - \frac{5 \cdot 10^{-6}}{0,6} \right)$$

$$V_b = 150.000 \text{ (V)}$$

- 6) Şekil 4'deki yük sistemi için $q = 6\mu C$ olmak üzere;
a) A noktasındaki toplam elektriksel potansiyeli hesaplayınız.
b) Yükleri buldukları noktalara getirmek için yapılması gereken işi bulunuz.



Şekil 4



$$a) V = \sum_i k \frac{q_i}{r_i}$$

$$V_A = k \frac{q_1}{r_1} + k \frac{q_2}{r_2} + k \frac{q_3}{r_3}$$

$$V_A = 9 \cdot 10^9 \left(- \frac{3 \cdot (6 \cdot 10^{-6})}{0,3} - \frac{2 \cdot (6 \cdot 10^{-6})}{0,5} + \frac{3 \cdot (6 \cdot 10^{-6})}{0,4} \right)$$

$$V_A = -351 \cdot 10^3 \text{ (V)}$$

$$V_A = 351 \text{ (kV)}$$

- b) q_1 yükünü, sonsuzdan bulunduğu noktaya getirmek için iş yapılmaz.
 q_1 yükü varken, q_2 yükünü, sonsuzdan bulunduğu noktaya getirmek için yapılması gereken iş, $k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ kadardır.

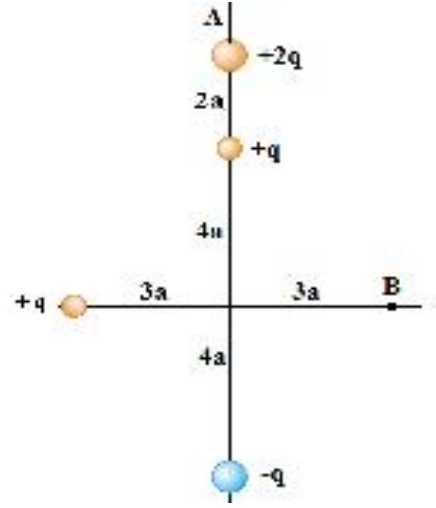
q_1 ve q_2 yükleri varken, q_3 yükünü, sonsuzdan bulunduğu noktaya getirmek için yapılması gereken iş, $k \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$ kadardır.

$$W = U = k \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

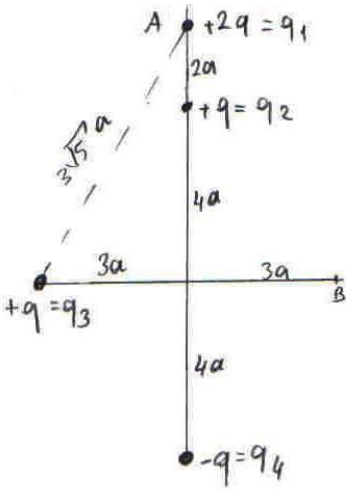
$$W = 9 \cdot 10^9 \left[\frac{3 \cdot (6 \cdot 10^{-6}) \cdot 2 \cdot (6 \cdot 10^{-6})}{0,4} - \frac{3 \cdot (6 \cdot 10^{-6}) \cdot 3 \cdot (6 \cdot 10^{-6})}{0,5} - \frac{2 \cdot (6 \cdot 10^{-6}) \cdot 3 \cdot (6 \cdot 10^{-6})}{0,3} \right]$$

$$W \approx -7,5 \text{ (J)}$$

- 7) a) Şekil 5'deki $+2q$ yükünü $A(0,6a)$ noktasından $B(3a,0)$ noktasına getirebilmek için gerekli olan elektriksel işi bulunuz.
b) Yeni sistemin toplam potansiyel enerjisini bulunuz.



Şekil 5



(a) $+2q$ yükünü $A(0,6a)$ 'dan, $B(3a,0)$ 'ye götürmek için yapılan işi

$$U_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

$$U_A = k \frac{2q(1q)}{2a} + k \frac{q(2q)}{3\sqrt{5}a} + k \frac{(-q)(2q)}{10a}$$

$$U_{\text{sistem}} = U_{21} + U_{31} + U_{41}$$

$$= k \frac{q^2}{a} + k \frac{2q^2}{3\sqrt{5}a} - k \frac{q^2}{5a}$$

$$= k \frac{q^2}{a} \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3\sqrt{5}} \right)$$

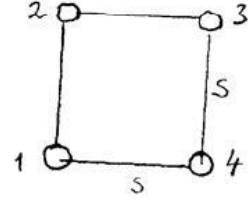
8) Bir kenarı s olan bir karenin köşelerine Q büyüklüğünde özdeş yükler yerleştirildiğinde ne kadarlık iş yapılır?

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

$$U = 0 + U_{12} + (U_{13} + U_{23}) + (U_{14} + U_{24} + U_{34})$$

$$U = 0 + \frac{kQ^2}{s} + \frac{kQ^2}{s} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right) + \frac{kQ^2}{s} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right)$$

$$U = 5,41 \frac{kQ^2}{s}$$



9) Bir Q yükü, yarıçapı R olan boş bir kürenin yüzeyine düzgün olarak dağılmıştır. Bu yükü, yarıçapı $R/2$ olan bir boş küreye taşımak için ne kadarlık iş yapılmak gerekir? (Yükler yine düzgün olarak dağılmıştır.)

$$dW = V dq = (1/4\pi\epsilon_0) (q/R) dq$$

$$W = \int dW = \frac{1}{2} Q^2 (1/4\pi\epsilon_0 R)$$

$$U_i = \frac{1}{2} Q^2 (1/4\pi\epsilon_0 R)$$

$$U_s = \frac{1}{2} Q^2 \left[1/4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R}{2} \right) \right]$$

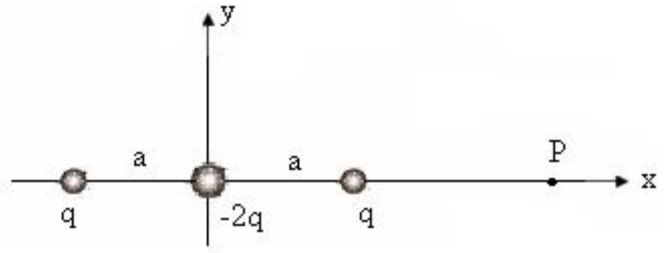
$$W = U_s - U_i = \frac{1}{2} Q^2 / 4\pi\epsilon_0 R$$

10) Şekil 6'daki sistem için;

a) x-ekseni üzerindeki P noktasında elektriksel potansiyeli ($x > a$) için bulunuz.

b) aynı potansiyel ($x > a$) için ne olur?

c) $+q_0$ yükü P noktasına getirildiğinde potansiyel enerjisi ne olur?



Şekil 6

a) $V_P = k \sum_i \frac{q_i}{r_i}$

$V_P = k \left\{ \frac{q}{x+a} - \frac{2q}{x} + \frac{q}{x-a} \right\}$

$V_P = k \left\{ \frac{qx - qa + qx + qa}{(x+a)(x-a)} - \frac{2q}{x} \right\}$

$V_P = k \left\{ \frac{2qx}{x^2 - a^2} - \frac{2q}{x} \right\}$

$= k \left\{ \frac{2qx^2 - 2qx^2 + 2qa^2}{x(x^2 - a^2)} \right\}$

$V_P = k \frac{2qa^2}{x(x^2 - a^2)}$

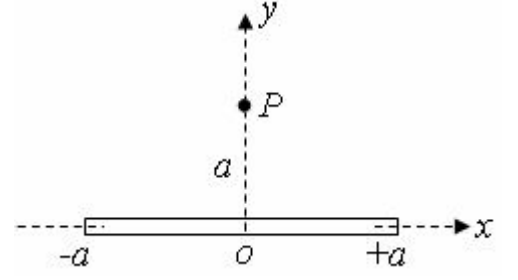
b) $V_P = 2kq \frac{a^2}{x^3 - xa^2} \Rightarrow 2kq \frac{a^2}{x^3 \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)}$ $x \gg a \Rightarrow \frac{a^2}{x} \rightarrow 0$

$V_P(x \gg a) = 2kq \frac{a^2}{x^3}$

c) $U = q_0 V_P \Rightarrow 2kq_0 q \frac{a^2}{x(x^2 - a^2)}$

$U = 2k \frac{qq_0 a^2}{x(x^2 - a^2)} //$

11) Şekil 7'deki boyca yük yoğunluğu λ , boyu $2a$ olan düzgün yüklü bir çubuğun ortasından geçen eksen üzerindeki bir P ($y=a$) noktasında oluşturacağı elektriksel potansiyeli bulunuz.



Şekil 7

0 noktasından x kadar uzaklıkta dx uzunluğundaki elemanter yükün, P de oluşturacağı elektriksel potansiyel,

$$dV = k \frac{\lambda dx}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \quad \text{dir}$$

$$V = k\lambda \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = k\lambda \left\{ \ln(a + a \cdot 2^{1/2}) - \ln(-a + a \cdot 2^{1/2}) \right\}$$

$$= k\lambda \ln \frac{1 + \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}}$$

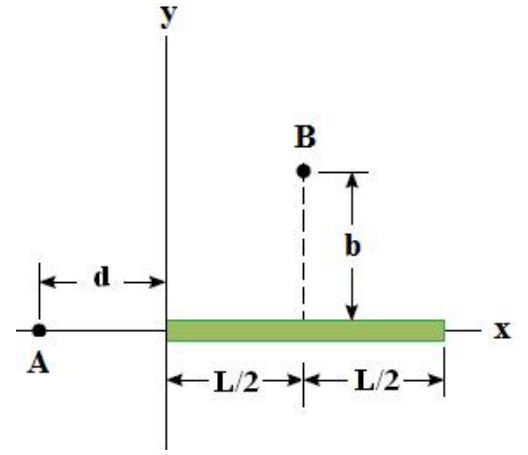
BİLGİ:

$$\int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^{1/2}} = \ln \left\{ x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\}$$

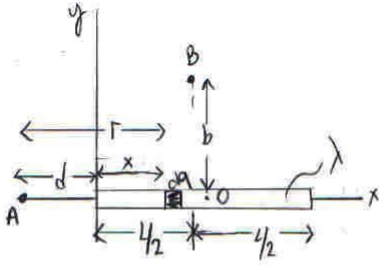
12) x eksenini boyunca uzanmış olan L uzunluklu çubuk üzerinde düzgün λ yük yoğunluğu bulunmaktadır.

a) A ve B noktalarındaki elektriksel potansiyeli hesaplayınız.

b) Çubuk düzgün olmayan $\lambda = \alpha x$ (α : sabit) yük yoğunluğuna sahip olursa A ve B noktalarındaki elektrik potansiyeli hesaplayınız.



Şekil 8



(a) A ve B noktalarındaki elektriksel potansiyeller;

$$V = k \int \frac{dq}{r} \quad \text{ile,}$$

$$dq = \lambda dx$$

$$V_A = k \int_0^L \frac{dq}{r} = k \int_0^L \frac{\lambda dx}{r}$$

$$\boxed{r = d + x}$$

$$V_A = k \lambda \int_0^L \frac{dx}{x+d}$$

$$\left[\text{integral tablosu: } \int \frac{dx}{(ax+b)} = \frac{1}{a} \ln(ax+b) \right]$$

$$V_A = k \lambda \left(\ln(x+d) \Big|_0^L \right)$$

$$V_A = k \lambda \ln \left(1 + \frac{L}{d} \right)$$

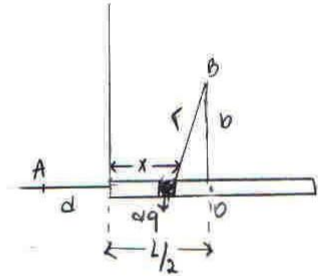
$$V = k \int \frac{dq}{r}$$

$$r = \sqrt{b^2 + \left(\frac{L}{2} - x \right)^2}$$

$$V_B = \int \frac{k \lambda dx}{(b^2 + (L/2 - x)^2)^{1/2}}$$

$$\boxed{u = \frac{L}{2} - x}$$

$$\boxed{du = -dx}$$



$$V_B = k \lambda \int \frac{-du}{\sqrt{b^2 + u^2}}$$

$$\left[\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \quad \text{veya } \sinh^{-1} \frac{x}{a} \right]$$

$$V_B = -k\lambda (\ln(u + \sqrt{u^2 + b^2}))$$

$$V_B = -k\lambda \left(\ln\left(\frac{L}{2} - x\right) + \sqrt{\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 + b^2} \right) \Big|_0^L$$

$$V_B = -k\lambda \left[\ln\left(\frac{L}{2} - \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + b^2}\right) - \ln\left(\frac{L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + b^2}\right) \right]$$

$$V_B = k\lambda \left[\ln\left(\frac{\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + b^2}}{\frac{L}{2} - \sqrt{\frac{L^2}{4} + b^2}}\right) \right]$$

b) $\lambda = \alpha x$ ise A ve B noktalarındaki potansiyel farkları;

$$V_A = \int k \frac{dq}{r} = k \int \frac{\lambda dx}{r} = k \alpha \int_0^L \frac{x dx}{(x+d)}, \quad \left[\begin{array}{l} \text{integral tablosundan;} \\ \int \frac{x dx}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln(ax+b) \end{array} \right]$$

$$V_A = k\alpha \left(x - d \cdot \ln(x+d) \right) \Big|_0^L$$

$$V_A = k\alpha \left(L - d \cdot \ln\left(1 + \frac{L}{d}\right) \right)$$

$$\text{B noktasında, } V_B = \int k \frac{dq}{r} = k\alpha \int \frac{x dx}{\sqrt{b^2 + (L/2 - x)^2}} \quad \left[\begin{array}{l} u = L/2 - x \\ du = -dx \end{array} \right]$$

$$V_B = k\alpha \int \frac{(L/2 - u) (-du)}{\sqrt{b^2 + u^2}}$$

$$V_B = k\alpha \left[\int \frac{-L/2 du}{\sqrt{b^2 + u^2}} + \int \frac{u du}{\sqrt{b^2 + u^2}} \right]$$

$$\left[\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = x + a^2 \right]$$

$$\left[\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \right]$$

$$V_B = -k\alpha \left[-\frac{L}{2} \left(\ln(u + \sqrt{u^2 + b^2}) \Big|_0^L + (u^2 + b^2) \Big|_0^L \right) \right]$$

$u = L/2 - x$ yazılırsa;

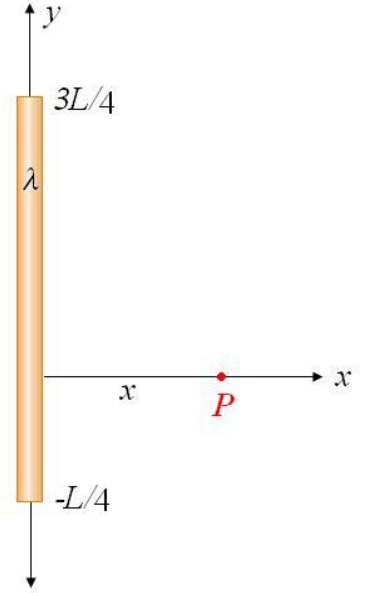
$$V_B = \frac{k\alpha L}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{L^2/4 + b^2} + L/2}{\sqrt{L^2/4 + b^2} - L/2}\right)$$

13) Şekil 9'da görüldüğü gibi, uzunluğu L ve toplam yükü Q olan bir çubuk $\lambda = \alpha y$ (α : sabit) yük yoğunluğuna sahiptir.

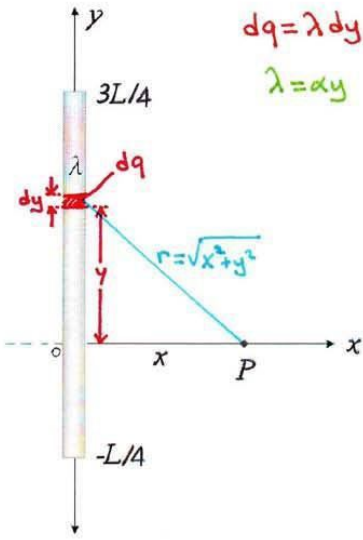
a) x eksenindeki P noktasında elektriksel potansiyeli bulunuz.

b) P noktasındaki elektrik alanın x bileşenini, (a) şıkında bulduğunuz potansiyeli kullanarak elde ediniz.

c) P noktasına bir q yükü konulursa, bu yüke etki eden elektriksel kuvvetin x bileşenini bulunuz.



Şekil 9



$$dq = \lambda dy$$

$$\lambda = \alpha y$$

$$V = k \int \frac{dq}{r}$$

$$a) V_E = k \int \frac{dq}{r} = k \int \frac{\lambda dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$V_E = k \int_{-L/4}^{3L/4} \frac{\alpha y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$V_E = \frac{k\alpha}{2} \int_{x^2 + \frac{L^2}{16}}^{x^2 + \frac{9L^2}{16}} \frac{du}{u^{1/2}}$$

$$x^2 + y^2 = u$$

$$2y dy = du$$

$$y = -\frac{L}{4}; u = x^2 + \frac{L^2}{16}$$

$$y = \frac{3L}{4}; u = x^2 + \frac{9L^2}{16}$$

$$V_E = k\alpha \left[u^{1/2} \right]_{x^2 + \frac{L^2}{16}}^{x^2 + \frac{9L^2}{16}}$$

$$V_E = k\alpha \left(\sqrt{x^2 + \frac{9L^2}{16}} - \sqrt{x^2 + \frac{L^2}{16}} \right)$$

b)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right)$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \rightarrow E_x = -\frac{dV}{dx}$$

$$E_x = -\frac{d}{dx} \left[k\alpha \left(\sqrt{x^2 + \frac{9L^2}{16}} - \sqrt{x^2 + \frac{L^2}{16}} \right) \right]$$

$$E_x = -k\alpha \left[\frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{9L^2}{16} \right)^{-1/2} 2x - \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{L^2}{16} \right)^{-1/2} 2x \right]$$

$$E_x = k\alpha \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{16}}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{9L^2}{16}}} \right)$$

c) $\vec{F}_p = q\vec{E} = q(E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k})$

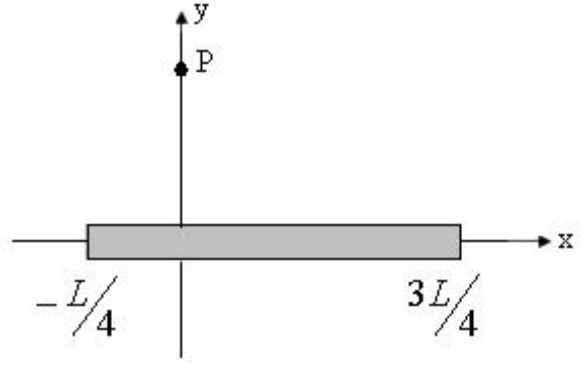
$$F_{p_x} = qE_x$$

$$F_{p_x} = k\alpha q \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{16}}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{9L^2}{16}}} \right)$$

14) L uzunluğunda ve çizgisel yük yoğunluğu $\lambda = \alpha x$ olan (α sabit) yüklü bir çubuk x-ekseni üzerine Şekil 10'deki gibi yerleştirilmiştir.

a) y-ekseni üzerinde P noktasındaki elektriksel potansiyeli hesaplayınız

b) a-şıkında bulduğunuz elektriksel potansiyeli kullanarak, elektrik alanın y bileşenini elde ediniz.



Şekil 10

Handwritten solution on grid paper:

Diagram: A rod of length L is placed along the x-axis from $x = -L/4$ to $x = 3L/4$. A point P is on the y-axis. A small element of length dx is shown at position x . The distance from the element to P is $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Given: $\lambda = \alpha x$

Charge element: $dq = \lambda dx = \alpha x dx$

Potential element: $dV_p = k \frac{dq}{r} = k \frac{\alpha x dx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Total potential: $V_p = k \int_{-L/4}^{3L/4} \frac{\alpha x dx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Substitution: $u = x^2 + y^2 \Rightarrow 2x dx = du \Rightarrow x dx = \frac{du}{2}$

Integration: $V_p = \frac{k\alpha}{2} \int_{(-L/4)^2 + y^2}^{(3L/4)^2 + y^2} \frac{du}{u^{1/2}} = \frac{k\alpha}{2} \left[\frac{u^{1/2}}{1/2} \right]_{(-L/4)^2 + y^2}^{(3L/4)^2 + y^2}$

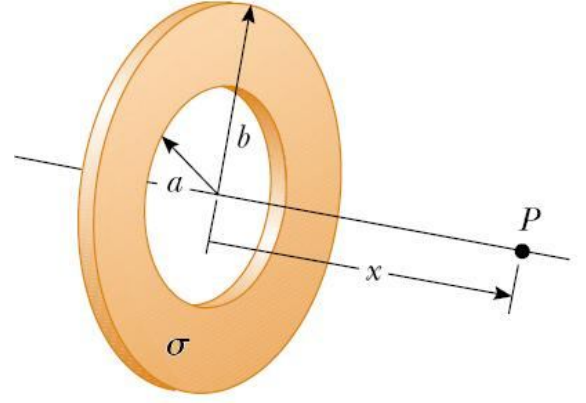
Result: $V_p = k\alpha \left\{ \left(\frac{9L^2}{16} + y^2 \right)^{1/2} - \left(\frac{L^2}{16} + y^2 \right)^{1/2} \right\}$

b) Electric field component $E_y = -\frac{\partial V_p}{\partial y}$

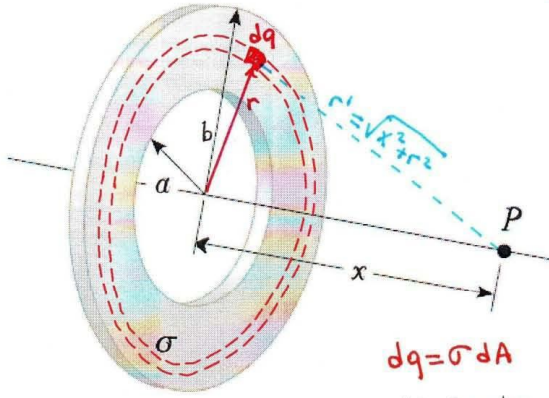
Calculation: $E_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ k\alpha \left[\left(\frac{9L^2}{16} + y^2 \right)^{1/2} - \left(\frac{L^2}{16} + y^2 \right)^{1/2} \right] \right\}$

Result: $E_y = -k\alpha y \left\{ \left(\frac{9L^2}{16} + y^2 \right)^{-1/2} - \left(\frac{L^2}{16} + y^2 \right)^{-1/2} \right\}$

- 15) a) Şekil 11'de gösterilen düzgün dağılmış σ yük yoğunluğu bulunan levhanın, eksenindeki bir P noktasında elektriksel potansiyelini hesaplayınız.
b) P noktasındaki elektrik alanı (a) şıkında bulduğunuz potansiyeli kullanarak elde ediniz.



Şekil 11



$$dq = \sigma dA$$

$$dA = 2\pi r dr$$

$$dq = 2\pi \sigma r dr$$

$$V = k \int \frac{dq}{r'}$$

$$a) V_E = k \int \frac{dq}{r'} = k \int \frac{\sigma dA}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

$$V_E = \pi k \sigma \int_a^b \frac{2r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

$$x^2 + r^2 = u$$

$$2r dr = du$$

$$r = a ; u = x^2 + a^2$$

$$r = b ; u = x^2 + b^2$$

$$V_E = \pi k \sigma \int_{x^2 + a^2}^{x^2 + b^2} \frac{du}{u^{1/2}}$$

$$V_E = \pi k \sigma \left[\frac{u^{1/2}}{1/2} \right]_{x^2 + a^2}^{x^2 + b^2}$$

$$V_E = 2\pi k \sigma (\sqrt{x^2 + b^2} - \sqrt{x^2 + a^2})$$

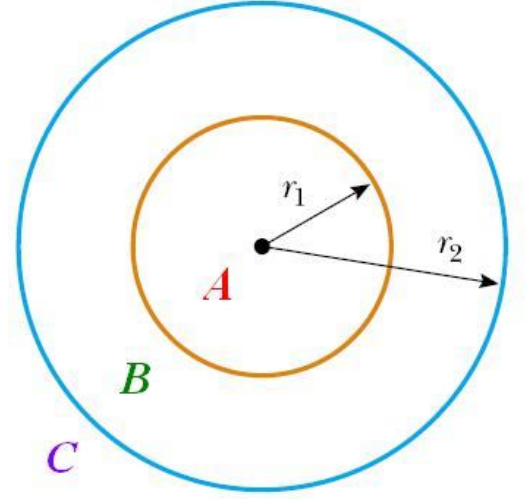
$$b) E_x = - \frac{dV}{dx}$$

$$E_x = - \frac{d}{dx} [2\pi k \sigma (\sqrt{x^2 + b^2} - \sqrt{x^2 + a^2})]$$

$$E_x = -2\pi k \sigma \left[\frac{1}{2} (x^2 + b^2)^{-1/2} \cdot 2x - \frac{1}{2} (x^2 + a^2)^{-1/2} \cdot 2x \right]$$

$$E_x = 2\pi k \sigma \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} \right)$$

- 16) Şekil 12'deki iki ince iletken küresel kabuğu göz önüne alınız. İçteki iletken kabuğun yarıçapı $r_1=15\text{cm}$ ve üzerindeki yük 10 nC ; dıştaki iletken kabuğun yarıçapı $r_2=30\text{cm}$ ve yükü -15 nC dur.
- a) A, B ve C bölgelerinde elektrik alanın şiddetini,
b) A, B ve C bölgelerinde elektriksel potansiyel değerlerini bulunuz. ($r \rightarrow \infty$ 'da $V=0$ alınız.)



Şekil 12

$$a) \Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{ic}}}{\epsilon_0}$$

A bölgesinde;

$$q_{\text{ic}} = 0; \quad \boxed{E_A = 0} \quad (r < r_1)$$

B bölgesinde;

$$E_B \cdot (4\pi r^2) = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

$$E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} = k \frac{q_1}{r^2}$$

$$E_B = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-9}}{r^2}$$

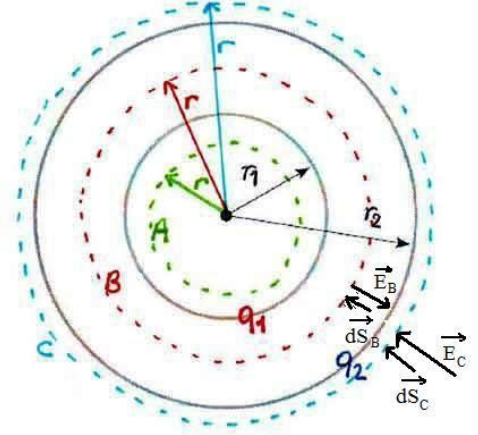
$$\boxed{E_B = \frac{90}{r^2} \text{ (V/m)}} \quad (r_1 < r < r_2)$$

C bölgesinde;

$$E_C \cdot (4\pi r^2) = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}$$

$$E_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r^2} = k \frac{q_1 + q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(10 - 15) \cdot 10^{-9}}{r^2}$$

$$\boxed{E_C = -\frac{45}{r^2} \text{ (V/m)}} \quad (r > r_2)$$



$$b) V_C = k \frac{(q_1 + q_2)}{r} ; V_C = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(10 - 15) \cdot 10^{-9}}{r} ; \boxed{V_C = -\frac{45}{r} (V)}$$

$$V_B = V_{r_2} + \int_{r_2}^r k \frac{q_1}{r^2} dr$$

$$r \rightarrow r_2 \text{ için } V_{r_2} = -\frac{45}{0,3} = -150 (V)$$

$$V_B = -150 + k q_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$V_B = -150 + 9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-9} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{0,3} \right)$$

$$\boxed{V_B = -450 + \frac{90}{r} (V)}$$

$$r \rightarrow r_1 \text{ için } V_{r_1} = -450 + \frac{90}{0,15} = +150 (V)$$

$$\boxed{V_A = +150 V}$$

İKİNCİ YOL:

$$V_C - V_\infty = -\int_{\infty}^C \vec{E}_C \cdot d\vec{S}_C$$

$$V_C = -\int_{\infty}^C \vec{E}_C \cdot d\vec{S}_C = -\int_{\infty}^C E_C dS_C \cos 0 = -\int_{\infty}^r \frac{45}{r^2} (-dr) = +\int_{\infty}^r \frac{45}{r^2} dr = 45 \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r = -\frac{45}{r} (V) \quad [dS_C = -dr]$$

$$r=r_2 \text{ için } V_{r_2} = -\frac{45}{0,3} = -150 (V) \quad [dS_B = -dr]$$

$$\begin{aligned} V_B &= -\int_{\infty}^{r_2} \vec{E}_C \cdot d\vec{S}_C - \int_{r_2}^B \vec{E}_B \cdot d\vec{S}_B = -\int_{\infty}^{r_2} E_C dS_C \cos 0 - \int_{r_2}^B E_B dS_B \cos 180 = -\int_{\infty}^{r_2} \frac{45}{r^2} (-dr) - \int_{r_2}^r \frac{90}{r^2} (-dr)(-1) = \\ &= +\int_{\infty}^{r_2} \frac{45}{r^2} dr - \int_{r_2}^r \frac{90}{r^2} dr = 45 \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^{r_2} - 90 \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_2}^r = -\frac{45}{r_2} + 90 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) = -\frac{45}{0,3} + 90 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{0,3} \right) = -450 + \frac{90}{r} (V) \end{aligned}$$

$$r=r_1 \text{ için } V_{r_1} = -450 + \frac{90}{0,15} = 150 (V)$$

$$V_A = 150 (V)$$

17) Yarıçapı R , toplam yükü Q olan düzgün yüklü içi boş bir kürenin içinde ve dışındaki potansiyeli bulunuz. ($r \rightarrow \infty$ 'da $V=0$ alınız.)

$$\text{Boş kürenin dışında, } r > R: E = k \frac{Q}{r^2} ;$$

$$\text{Boş kürenin içinde, } r < R: E = 0$$

$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E_r dr = E dr$ olur. Kürenin dışındaki bir noktada,

$$\Delta V = V(r) - V(\infty) = - \int_{\infty}^r E dr = -k Q \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = k Q / r$$

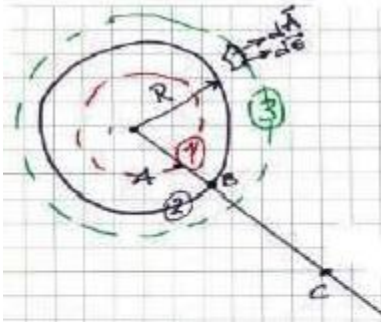
$$r > R : V = k \frac{Q}{r}$$

Boş bir kürenin içindeki bir nokta ile sonsuzdaki noktanın potansiyeli arasındaki fark,

$$\Delta V = - \left(\int_{\infty}^R E_{\text{dış}} dr + \int_R^r E_{\text{iç}} dr \right), \quad E_{\text{iç}} = 0$$

$$r \leq R : V = k \frac{Q}{R} = \text{sabit}$$

- 18) R yarıçaplı, Q yüklü yalıtkan bir küre yarıçapa bağlı değişimi $\rho = Ar^2$ olan düzgün olmayan bir yük yoğunluğuna sahiptir. Gauss kanununu kullanarak;
- Küre dışında ve içinde elektriksel alanı bulunuz.
 - Küre içindeki bir noktada elektriksel potansiyeli hesaplayınız.
 - Elektrik alan ve elektriksel potansiyelin yarıçapa göre değişimini veren grafiği kabaca çiziniz.



a) $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{ic}}{\epsilon_0}$

$$q_{ic} = Q = \int_0^R \rho dV = \int_0^R Ar^2 4\pi r^2 dr = 4\pi A \frac{R^5}{5}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi A \frac{r^5}{5\epsilon_0} \quad \vec{E}_{dış} = \frac{AR^5}{5\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$r < R$ için \Rightarrow

$$q_{ic} = \int_0^r \rho dV = \int_0^r Ar^2 4\pi r^2 dr$$

$$q_{ic} = A 4\pi \frac{r^5}{5}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi A \frac{r^5}{5\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_{iç} = A \frac{r^3}{5\epsilon_0} \hat{r}$$

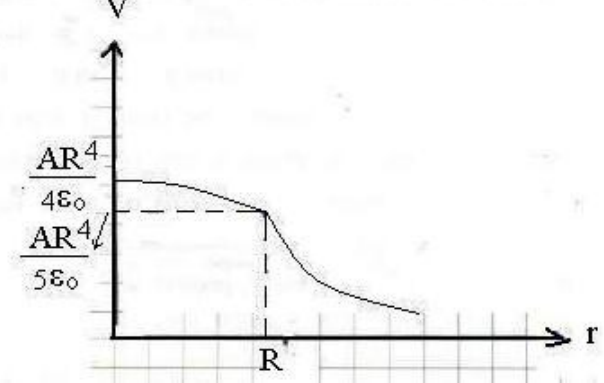
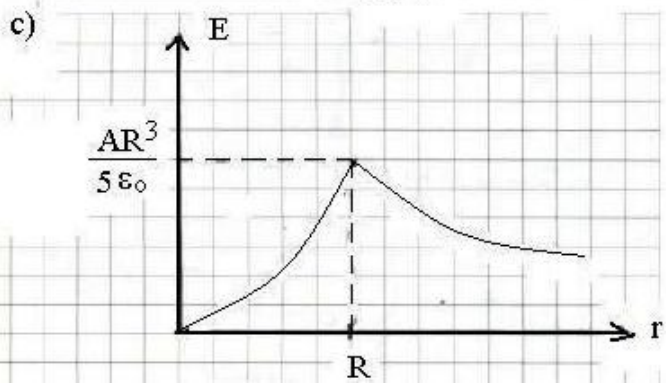
b)

$$V_A - V_\infty = V_A = - \int_\infty^R E_{dış} ds - \int_R^r E_{iç} ds \quad ds = dr$$

$$V_A = \int_\infty^R \frac{AR^5}{5\epsilon_0 r^2} dr - \int_R^r A \frac{r^3}{5\epsilon_0} dr$$

$$V_A = \frac{AR^5}{5\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - 0 \right) - \frac{A}{5\epsilon_0} \left(\frac{r^4}{4} - \frac{R^4}{4} \right)$$

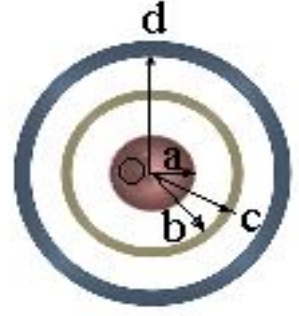
$$V_A = \frac{A}{20\epsilon_0} (5R^4 - r^4)$$



19) a yarıçaplı ve net yükü +Q olan iletken küre, iki tane halka ile çevrilidir (Şekil 13). İçteki halkanın net yükü olmayıp, iç yarıçapı ve b dış yarıçapı c'dir. Dıştaki halkanın net yükü -Q olup iç yarıçapı d'dir.

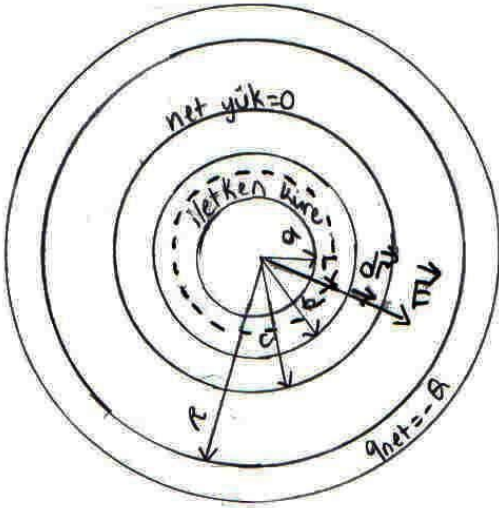
a) İçteki halka ile iletken küre arasındaki elektriksel potansiyel farkını hesaplayınız.

b) $c < r < d$ ve $r > d$ bölgelerinde elektrik alanı hesaplayınız.



Şekil 13

a) içteki halka ile iletken küre arasındaki elektriksel potansiyel farkı;



$$\Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad d\vec{s} = d\vec{r}$$

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_a^b E \cdot dr \cos \theta \quad (\theta = 0^\circ)$$

$$= - \int_a^b E \cdot dr = - \int_a^b \frac{kQ}{r^2} dr.$$

b) $c < r < d$ bölgesinde; $E = \frac{kQ}{r^2}$

$r > d$ bölgesinde; $q_{net} = 0$ $E = 0$