1) 40 cm çaplı bir ilmek, düzgün bir elektrik alanında, en büyük akının elde edildiği konuma yerleştiriliyor. Bu konumda akı $5.2x10^5$ (Nm^2/C) olarak ölçülüyor. Elektrik alanın büyüklüğü ne kadardır?

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\,\mathrm{Cos}\,\theta$$

$$A = \pi r^2 = \pi (0{,}2)^2 = 0{,}126\ m^2$$

$$5{,}2 \times 10^5 = E \cdot 0{,}126 \cdot \mathrm{Cos}\,0^\circ$$ ($\mathrm{Cos}\,\theta_{max} = 1$; $\theta_{max} = 0$)

$$E = 4{,}14 \times 10^6\ \frac{N}{C}$$

2) $a\vec{i} + b\vec{j}$ düzgün elektrik alanı A yüz ölçümlü bir yüzeyden geçmektedir. Bu yüz ölçümden geçen elektrik akısını, yüzey;

a) yz düzleminde,
b) xz düzleminde,
c) xy düzleminde bulunan yüzeyler için hesaplayınız.

Yüzey vektörü düzeye dik, dışarı doğrudur. Buna göre,

a) $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot A\vec{i} = aA$

b) $\Phi_E = (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot A\vec{j} = bA$

c) $\Phi_E = (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot A\vec{k} = 0$

3) 12 μ C 'luk bir nokta yük, 22 cm yarıçaplı küresel bir tabakanın merkezine konulmuştur.

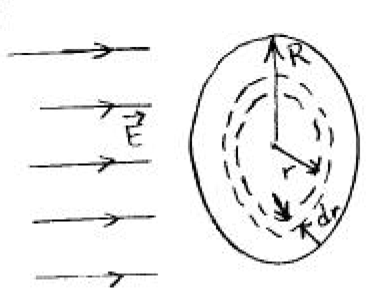
a) Tabakanın tüm yüzeyinden,
b) Herhangi bir yarım küre yüzeyinden geçen elektrik akısı ne kadardır?
c) Sonuçlar yarıçapa bağlı mıdır? Açıklayınız.

a) $\Phi_{E,tabaka} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} = \frac{12 \times 10^{-6}}{8{,}85 \times 10^{-12}} = 1{,}36 \times 10^6\ N.m^2/C$

b) $\Phi_{E,\ yarım\ tabaka} = \frac{1}{2}(1{,}36 \times 10^6) = 6{,}78 \times 10^5\ Nm^2/C$

c) Hayır. Her yüzeyden aynı sayıda alan çizgisi geçer, yarıçap değişimi sonucu etkilemez.

4) Yönü sabit olan bir elektrik alan, yarıçapı R olan bir daire düzlemine diktir. Dairenin merkezinden r kadar uzaklıkta elektrik alanın şiddeti $E_0\left[1-\frac{r}{R}\right]$ ile veriliyor. R yarıçaplı daireden geçen elektrik akısını bulunuz.



$$d\phi = \vec{E}.d\vec{A} = E\,dA = E_0\left(1-\frac{r}{R}\right)(2\pi r\,dr)$$

$$\phi = \int E\,dA = \int E_0\left(1-\frac{r}{R}\right)(2\pi r\,dr)$$

$$\phi = E_0.2\pi\int_0^R\left(1-\frac{r}{R}\right)r\,dr$$

$$\phi = \pi E_0\frac{R^2}{3}$$

5) Yeryüzüne yakın noktalarda herhangi bir günde ölçülen elektrik alanın şiddeti *100 (N/C)'*dur ve yönü radyal olarak içeri doğrudur. Bu değer Dünya'nın her noktası için aynı olduğunda,
a) Dünya'daki toplam yükün büyüklüğü ve işaretini bulunuz.
b) Yük yoğunluğu bulunuz.

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = -EA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$Q = -\varepsilon_0 4\pi R^2 E = -\left[1/(9\times10^9)\right](6{,}37\times10^6)^2(100)$$

$$= -4{,}5\times10^5\,C$$

Yüzey yük yoğunluğu ;

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \varepsilon_0 E = -8{,}9\times10^{-10}\frac{C}{m^2}$$

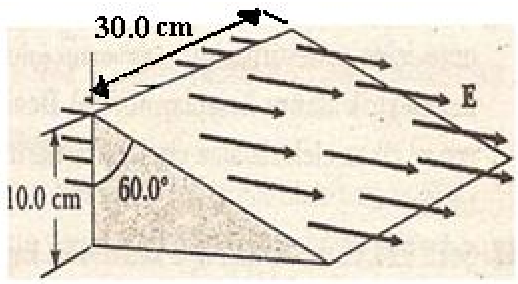
6) Küresel simetrik bir yük dağılımı, a bir sabit olmak üzere $\rho = a / r$ 'dir. Elektrik alanı r' nin fonksiyonu olarak bulunuz.

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\,dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r\frac{a}{r}4\pi r^2\,dr$$

$$E.4\pi r^2 = \frac{4\pi a}{\varepsilon_0}\int_0^r r\,dr = \frac{4\pi a}{\varepsilon_0}.\frac{r^2}{2}$$

$$E = \frac{a}{2\varepsilon_0}$$

7) Şekil 1'deki kapalı üçgensel kutu E=7.80x10[4] (N/C) büyüklüğündeki yatay elektrik alanında bulunmaktadır. Kutunun
a) düşey yüzeyinden,
b) eğik yüzeyinden,
c) tüm yüzeylerinden, geçen elektrik akısını hesaplayınız.



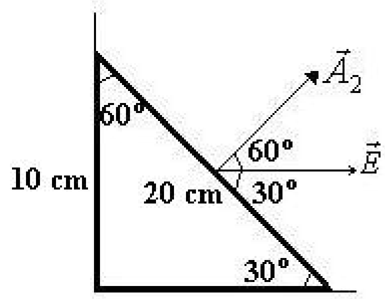
Şekil 1

a) Düşey yüzeyin alanı A_1=10 cm x 30 cm= 300 cm^2 =0.03 m^2

Bu yüzeyden geçen akı;

$$\Phi_1 = EA_1 Cos\theta_1 = 7.8x10^4 0.03Cos180 = -2.34Nm^2/C$$

b) Cos 60=1/2 olduğundan eğik yüzeyin diğer kenar uzunluğu 20 cm olmalıdır. Buna göre eğik yüzeyin alanı A_2=20 cm x 30 cm= 600 cm^2 =0.06 m^2 olur.



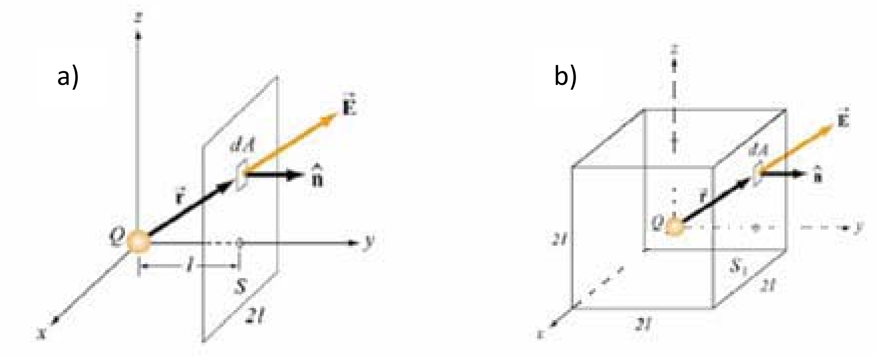
Bu yüzeyden geçen akı;

$$\Phi_2 = EA_2 Cos\theta_2 = 7.8x10^4 0.06Cos60 = 2.34Nm^2/C$$

c) Kutunun taban, ön ve arka yüzeylerinden geçen akı değerleri sıfırdır. Çünkü bu yüzeylerde, elektrik alan vektörü yüzey vektörüne diktir.
Tüm yüzeylerden geçen toplam akıyı bulmak için düşey ve eğik yüzeylerin akılarını toplarsak;

$\Phi_T = -2.34 + 2.34 = 0Nm^2/C$ olur.

8) a) Şekil 2.a'da görülen karenin bir kenarı 2ℓ dir ve bu karenin merkezinden dik uzaklığı l olan noktada bir Q yükü bulunmaktadır. Kare yüzeyinden geçen akıyı bulunuz.
b) a şıkkının sonucunu kullanarak, Şekil 2.b de görülen kapalı altı yüzlü küpün yüzeylerinden geçen toplam akıyı bulunuz (yük, kübün merkezindedir).



Şekil 2

+Q yükünden oluşan elektrik alan,

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r} = k\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = k\frac{Q}{r^3}\vec{r} = k\frac{Q}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})$$

$$d\vec{A} = dA\hat{j} = dxdz\hat{j}$$

$$\vec{E}d\vec{A} = k\frac{Q}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}ydxdz \qquad (y = l)$$

$$= k\frac{Ql}{(x^2+l^2+z^2)^{3/2}}dxdz$$

$$\boxed{\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}}$$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{A} = kQl\int_{-l}^{+l}dx\int_{-l}^{+l}\frac{dz}{(x^2+l^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= kQl\int_{-l}^{+l}dx\left[\frac{z}{\left(x^2+l^2\right)\left(x^2+l^2+z^2\right)^{1/2}}\right]\Big|_{-l}^{+l} = 2kQl^2\int_{-l}^{+l}\frac{dx}{\left(x^2+l^2\right)\left(x^2+2l^2\right)^{1/2}}$$

$$\boxed{\int\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^{1/2}} = \frac{\tan^{-1}\left(\dfrac{x\sqrt{b^2-a^2}}{a\sqrt{b^2+x^2}}\right)}{a(b^2-a^2)^{1/2}}}$$

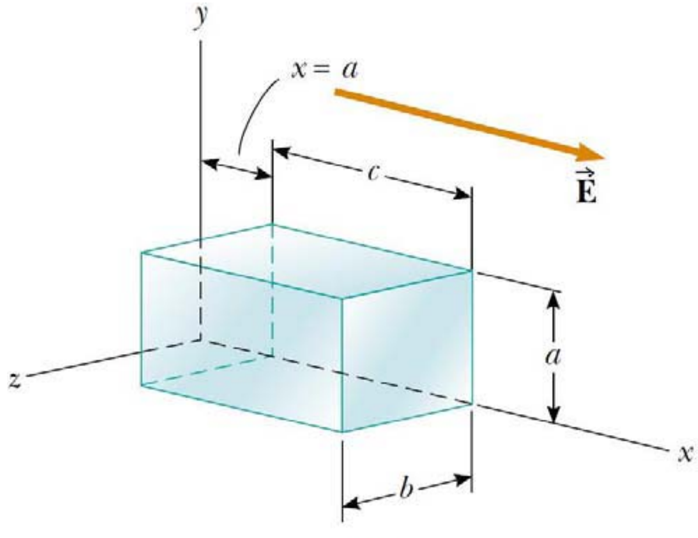
$$= 2kQ\,\tan^{-1}\left(\frac{x}{\left(2l^2+x^2\right)^{1/2}}\right)\Big|_{-l}^{+l} = 2kQ\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{Q}{6\varepsilon_o} \qquad \left(k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)$$

b) $\Phi_T = 6\left(\dfrac{Q}{6\varepsilon_o}\right) = \dfrac{Q}{\varepsilon_o}$

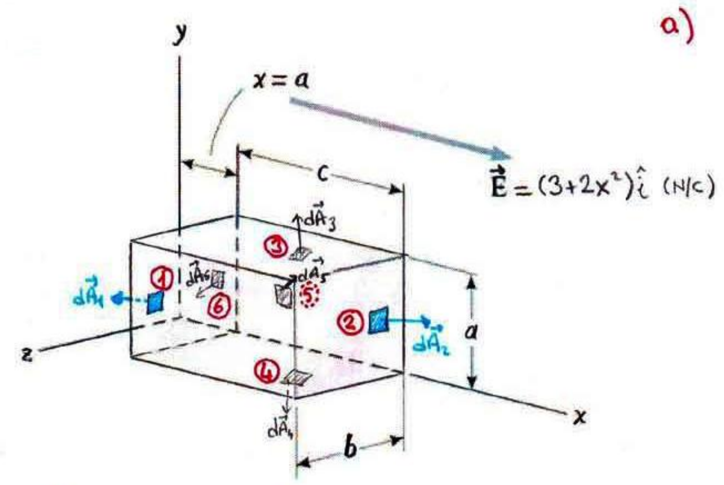
9) Boyutları a=b= 0.4 *(m)* ve c= 0.6 *(m)* olan kapalı bir yüzey Şekil 3'deki gibi yerleştirilmiştir. Bölgedeki elektrik alan düzgün olmayıp, x metre ile belirtilmek üzere, $\vec{E} = (3 + 2x^2)\vec{i}$ *(N/C)* ile verildiğine göre;

a) Kapalı yüzeyden geçen net elektrik akısını,

b)Kapalı yüzey içinde kalan net yük miktarını hesaplayınız.



Şekil 3



a) $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$

$$\Phi_E = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6$$

$$\Phi_3 = \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_3 E\,dA\cos 90^\circ = 0$$

Benzer sekilde;

$$\Phi_4 = \Phi_5 = \Phi_6 = 0$$

$$\Phi_E = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\vec{E}_1 = (3+2x^2)\hat{i}\,\Big|_{x=a} = (3+2a^2)\hat{i} \text{ (N/C)}$$

$$\vec{E}_2 = (3+2x^2)\hat{i}\,\Big|_{x=a+c} = [3+2(a+c)^2]\hat{i} \text{ (N/C)}$$

$$\Phi_E = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\Phi_E = \int_1 \vec{E}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \int_2 \vec{E}_2 \cdot d\vec{A}_2$$

$$\Phi_E = \int_1 (3+2a^2)\hat{i} \cdot dA_1(-\hat{i}) + \int_2 [3+2(a+c)^2]\hat{i} \cdot dA_2\,\hat{i}$$

$A_1 = A_2 = a.b$

$$\Phi_E = -(3+2a^2)\int_1 dA_1 + (2a^2+2c^2+4ac+3)\int_2 dA_2$$

$$\Phi_E = -(3+2a^2)A_1 + (2a^2+2c^2+4ac+3)A_2$$

$$\Phi_E = -(3+2a^2)ab + (2a^2+2c^2+4ac+3)ab$$

$$\boxed{\Phi_E = 2abc(2a+c)} \qquad \begin{aligned} a=b&=0,4\,m \\ c&=0,6\,m \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\Phi_E = 0,27\ (N.m^2/c)}$$

b) $\Phi_E = \dfrac{q}{\epsilon_0}$

$$q = \epsilon_0 \Phi_E$$

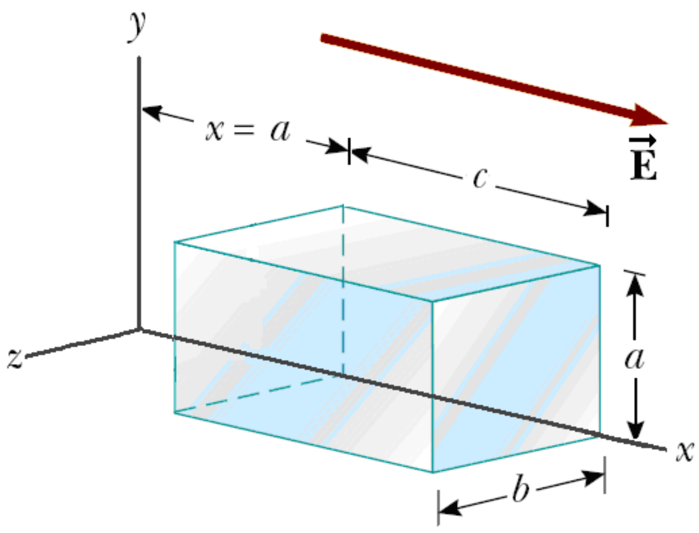
$$q = 8,85.10^{-12}.0,27$$

$$\boxed{q = 2,39.10^{-12}\,C}$$

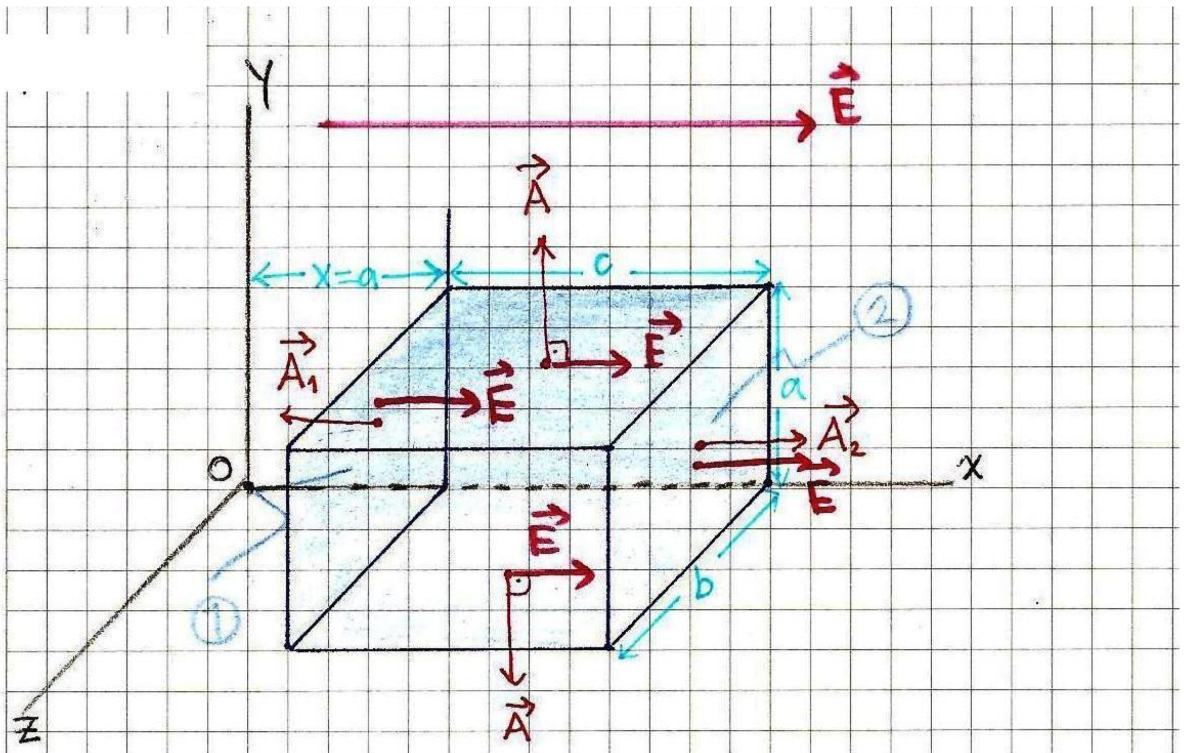
10) Boyutları a=0.2 m, b=0.3 m ve c=0.3 m olan kapalı bir yüzey Şekil 4'deki gibi yerleştirilmiştir. Bölgedeki elektrik alanı düzgün olmayıp, x metre ile verilmek üzere; $E=(1+x^2)$ (N/C) ile verilmiştir.

a) Kapalı yüzeyden geçen net elektrik akısını,

b) Kapalı yüzey içinde kalan net yük miktarını hesaplayınız.



Şekil 4



Kapalı yüzeyden geçen net elektrik akısı;

$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$

* ① yüzeyinde; $\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \vec{A}_1 = (1+x^2)\cdot(ab)\cdot\cos 180^\circ$ veya

$x=a$ $\qquad = (1+x^2)\,\vec{i}\,(ab)\,(-\vec{i})$

$\Phi_1 = -(1+a^2)(ab)\left(\frac{N}{C}m^2\right)$

② yüzeyinde; $\Phi_{E2} = \vec{E_2} \cdot \vec{A_2} = E_2 A_2 \cos 0°$

$x = (a+c)$ $\quad = (1+(a+c)^2)(ab)\left(\frac{Nm^2}{C}\right)$

a) $\Phi_T = \Phi_1 + \Phi_2 = -(1+a^2)(ab) + (1+(a+c)^2)(ab)$

$\Phi_T = -ab - a^3b + ab + a^3b + 2a^3bc + abc = abc\,(2a+c)$

$a = 0{,}2\,m$
$b = 0{,}3\,m$
$c = 0{,}3\,m$

$\Phi_T = 12{,}6 \cdot 10^{-3} \frac{Nm^2}{C}$

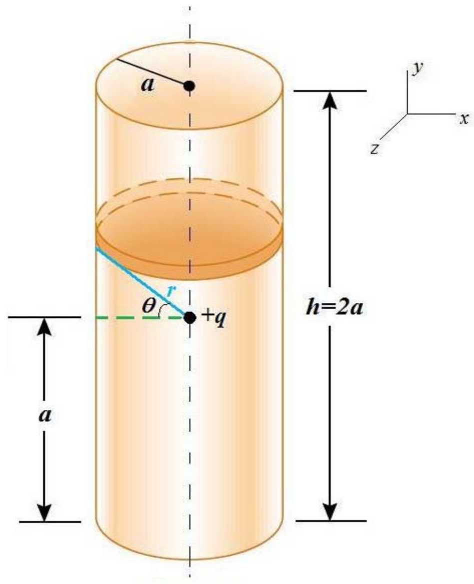
b) Kapalı yüzey içinde kalan net yük miktarı;

$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0} = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0} = \frac{q_{net}}{\epsilon_0}$

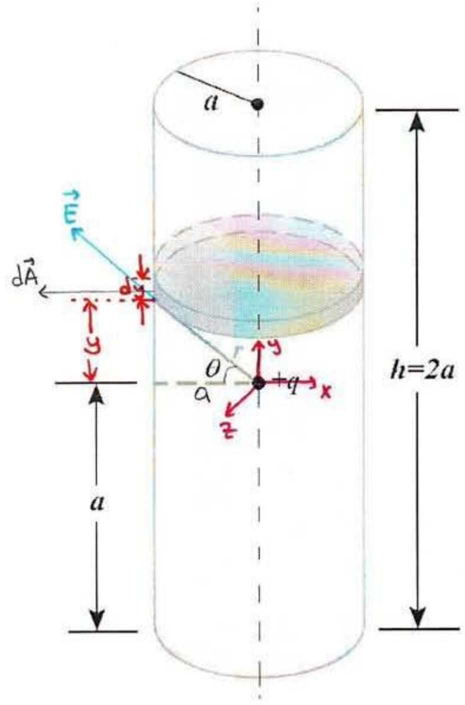
$\Phi = \frac{q_{net}}{\epsilon_0}$ $\quad q_{net} = \Phi \cdot \epsilon_0 = 1{,}11 \cdot 10^{-13}\,C$

$\epsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} (C^2/Nm^2)$

11) Şekil 5'deki gibi yarıçapı a ve yüksekliği $2a$ olan bir silindirin merkezinde bir q nokta yükü bulunmaktadır. Silindirin yanal yüzeyinden geçen elektrik akısının $\dfrac{\sqrt{2}q}{2\varepsilon_0}$ bağıntısı ile verildiğini gösteriniz.



Şekil 5



$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \qquad \vec{E} = k\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$$\Phi_E = \oint E \, dA \cos\theta$$

$$dA = 2\pi a \, dy$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow r = \frac{a}{\cos\theta}$$

$$tg\theta = \frac{y}{a} \Rightarrow y = a \, tg\theta$$

$$dy = a \sec^2\theta \, d\theta$$

$$\Phi_E = \int k\frac{q}{r^2} dA \cos\theta = \int k\frac{q}{r^2} 2\pi a \, dy \, \frac{a}{r}$$

$$\Phi_E = 2\pi a^2 kq \int_{-a}^{a} \frac{dy}{r^3} = 2\pi a^2 kq \int_{-a}^{a} \frac{dy}{\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^3}$$

$$\Phi_E = 2\pi a^2 kq \int \frac{\cos^3\theta \; a \sec^2\theta \, d\theta}{a^3} \qquad \Bigg| \; \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Phi_E = 2\pi kq \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta \, d\theta$$

$$\Phi_E = 2\pi kq \sin\theta \Big]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

integral sınırları:

$y = -a$; $y = a\,tg\theta$; $-a = a\,tg\theta$; $tg\theta = -1$; $\theta = -\pi/4$

$y = a$; $y = a\,tg\theta$; $a = a\,tg\theta$; $tg\theta = 1$; $\theta = \pi/4$

$$\Phi_E = 2\pi kq\left[\sin\frac{\pi}{4} - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

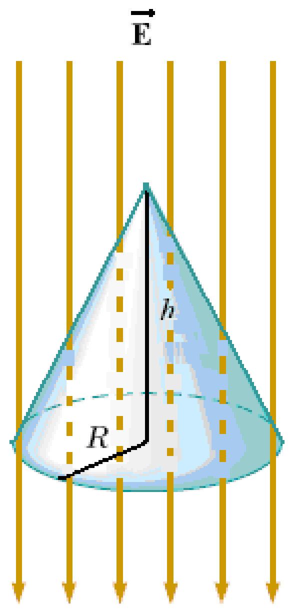
$$\Phi_E = 2\pi kq\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$\Phi_E = 2\pi kq\sqrt{2}$$

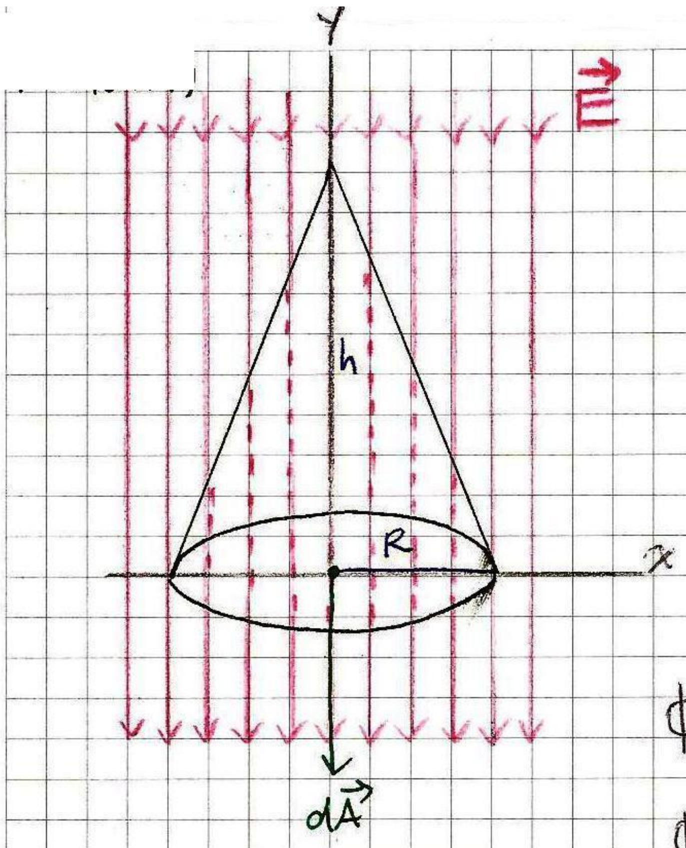
$$\Phi_E = 2\pi\frac{1}{4\pi\epsilon_0}q\sqrt{2}$$

$$\boxed{\Phi_E = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{q}{\epsilon_0}}$$

12) R yarıçaplı dairesel tabanlı bir koni Şekil 6'daki gibi ekseni düşey şekilde durmaktadır. Düzgün bir E elektrik alanı düşey doğrultuda uygulanmaktadır. Tabanı hariç, koni yüzeyinden geçen akının "$-\pi R2E$" ile verildiğini gösteriniz.



Şekil 6



Yük sarmayan kapalı bir yüzeyden geçen net akı sıfır olduğu için;

$$\Phi_E = \Phi_{E\,yanal} + \Phi_{E\,taban} = 0$$

$$\Phi_{E\,yanal} = -\Phi_{E\,taban}$$

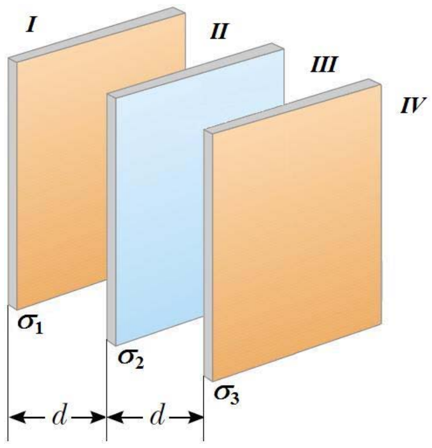
$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$\Phi_{E\,taban} = EA\cos 0^\circ = E(\pi R^2)\left(\frac{N}{C}m^2\right)$$

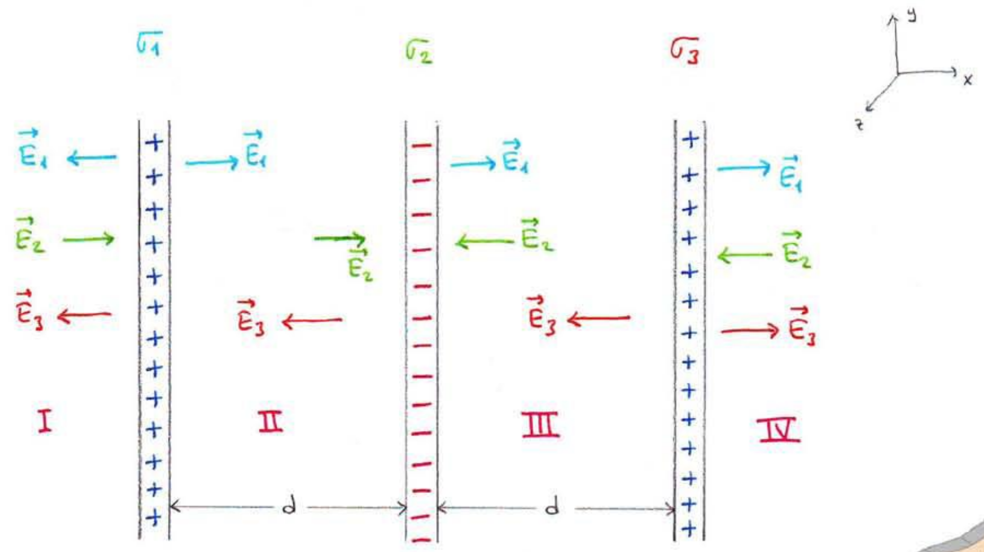
$$\Phi_{E\,yanal} = -E\pi R^2 \left(\frac{N}{C}m^2\right)$$

13) Çok geniş üç yalıtkan levha birbirlerinden eşit aralıklarla Şekil 7'deki gibi yerleştirilmiştir. Levhalar $\sigma_1 = +5(\mu C/m^2)$, $\sigma_2 = -10(\mu C/m^2)$, $\sigma_3 = +15(\mu C/m^2)$ yük yoğunluklarına sahiptir. Elektrik alan vektörünü;

a) *I* bölgesinde,
b) *II* bölgesinde,
c) *III* bölgesinde,
d) *IV* bölgesinde bulunuz.



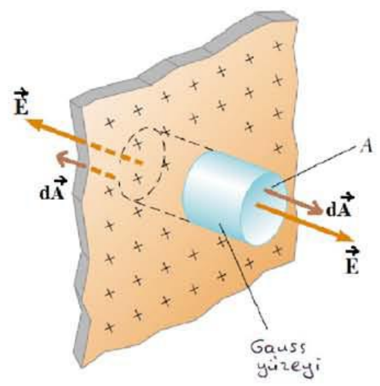
Şekil 7



$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}$ $E_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}$ $E_3 = \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0}$

$E_1 = \frac{5.10^{-6}}{2.8,85.10^{-12}}$ $E_2 = \frac{10.10^{-6}}{2.8,85.10^{-12}}$ $E_3 = \frac{15.10^{-6}}{2.8,85.10^{-12}}$

$E_1 = 2,82.10^5$ (N/C) $E_2 = 5,65.10^5$ (N/C) $E_3 = 8,47.10^5$ (N/C)



I bölgesinde; $\vec{E}_I = E_1(-\hat{i}) + E_2(\hat{i}) + E_3(-\hat{i})$

$\vec{E}_I = (-2,82 + 5,65 - 8,47).10^5\,\hat{i}$

$\boxed{\vec{E}_I = 5,64.10^5(-\hat{i})(N/C)}$

II bölgesinde; $\vec{E}_{II} = E_1(\hat{i}) + E_2(\hat{i}) + E_3(-\hat{i})$

$\vec{E}_{II} = (2,82 + 5,65 - 8,47).10^5\,\hat{i}$

$\boxed{\vec{E}_{II} = 0}$

$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0}$

$\Phi_E = 2EA = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$

$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

III bölgesinde; $\vec{E}_{III} = E_1(\hat{i}) + E_2(-\hat{i}) + E_3(-\hat{i})$

$$\vec{E}_{III} = (2{,}82 - 5{,}65 - 8{,}47).10^5\,\hat{i}$$

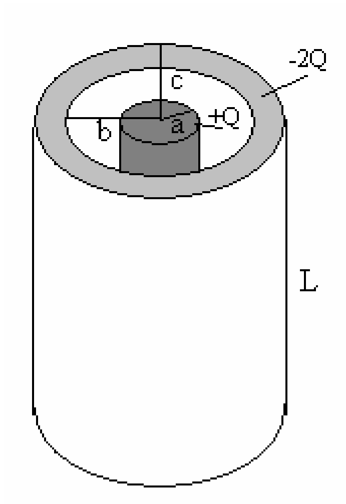
$$\boxed{\vec{E}_{III} = 11{,}30.10^5\,(-\hat{i})\ (N/C)}$$

IV bölgesinde; $\vec{E}_{IV} = E_1(\hat{i}) + E_2(-\hat{i}) + E_3(\hat{i})$

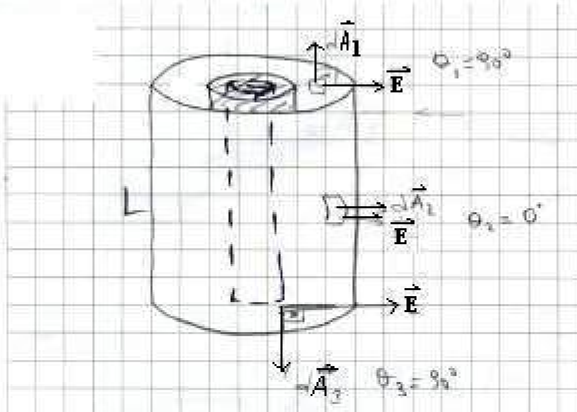
$$\vec{E}_{IV} = (2{,}82 - 5{,}65 + 8{,}47).10^5\,\hat{i}$$

$$\boxed{\vec{E}_{IV} = 5{,}64.10^5\,(\hat{i})\ (N/C)}$$

14) a yarıçaplı L uzunluklu dolu yalıtkan bir silindirin düzgün dağılmış yükü +Q dur. Bu silindirin dışında aynı merkezli iç yarıçapı b ve dış yarıçapı c olan - 2Q yüklü iletken bir silindir kabuk bulunmaktadır (Şekil 8). Gauss yasasını kullanarak: $r < a$, $a < r < b$, $b < r <$ c ve r>c bölgeleri için elektrik alanı bulunuz.



Şekil 8



a) $r < a$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

$$\cancel{\oint_1 E\,dA\cos 90}^{\,0} + \oint_2 E\,dA\cos 0 + \cancel{\oint_3 E\,dA\cos 90}^{\,0} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

$$E\cdot 2\pi r L = \frac{\rho \pi r^2 L}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \qquad \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\pi a^2 L}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{Qr}{2\pi a^2 L \varepsilon_0}\,\hat{r}$$

$$\vec{E}_1 = 2k\,\frac{Qr}{a^2 L}\,\hat{r}$$

b) $a < r < b$ $\qquad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$

$$E\,2\pi r L = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \vec{E}' = \frac{2kQ}{Lr}\,\hat{r}$$

c) $b < r < c$ $\qquad$ bölge iletken $\qquad E = 0$

d) $r > c$ $\qquad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$

$$E\,2\pi r L = \frac{+Q - 2Q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = 2k\,\frac{Q}{Lr}\,(-\hat{r})$$

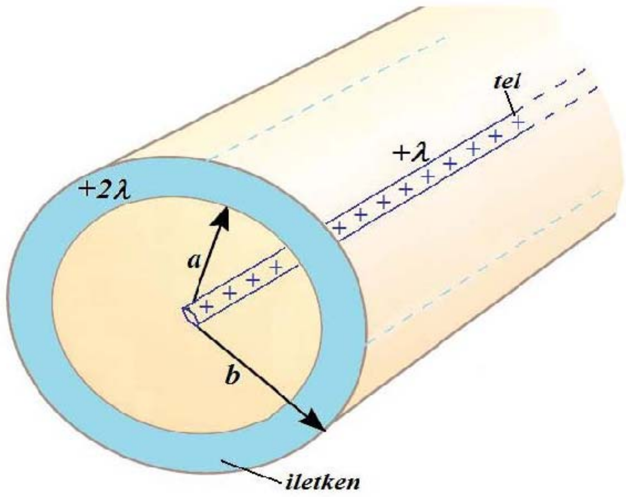
15) Birim uzunluk başına yükü $+\lambda$ olan uzun bir tel, iç yarıçapı a ve dış yarıçapı b olan silindirik bir kabuğun ekseni boyunca Şekil 9'daki gibi yerleştirilmiştir. Silindirik kabuk iletken olup birim uzunluk başına yükü $+2\lambda$'dır. Elektrostatik dengede;

a) $r<a$ 'da,

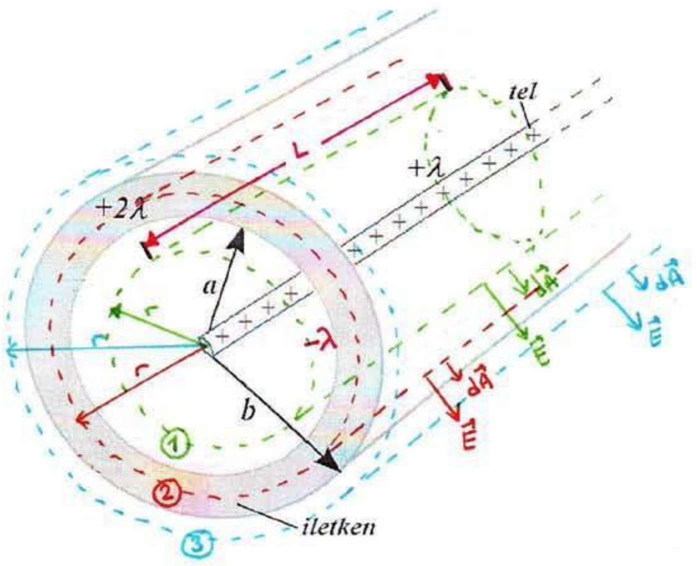
b) $a<r<b$ 'de,

c) $r>b$ 'de elektrik alanın şiddetini hesaplayınız.

d) Silindirik kabuğun yük dağılımını bulunuz.



Şekil 9



$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0}$$

a) $q_{iç} = \lambda L$

$$E(2\pi r L) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

$$\boxed{E = 2k\frac{\lambda}{r}} \quad r<a$$

b) İletken içinde $E=0$

$$\boxed{E=0} \quad a<r<b$$

c) $E(2\pi r L) = \dfrac{\lambda L + 2\lambda L}{\epsilon_0}$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{3\lambda}{r}$$

$$\boxed{E = 6k\frac{\lambda}{r}} \quad r>b$$

d) $q_{iç} = -\lambda L$

(Telin, silindirik kabuğun iç yüzeyini indüklemesinden dolayı)

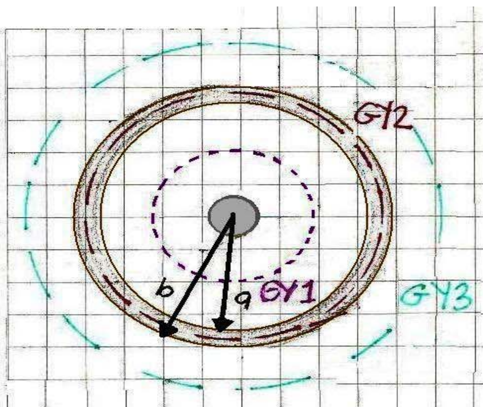
$$q_{silindir} = q_{iç} + q_{dış}$$

$$\lambda_{silindir} \cdot L = -\lambda L + q_{dış}$$

$$2\lambda L + \lambda L = q_{dış}$$

$$\boxed{q_{dış} = 3\lambda L}$$

16) İç yarıçapı *a* ve dış yarıçapı *b* olan sonsuz uzunlukta yalıtkan silindirik bir tabakada ρ (C/m^3) düzgün hacimsel yük yoğunluğu bulunuyor. Bu tabakanın eksenine λ (C/m) doğrusal yük yoğunluklu bir yük doğrusu yerleştiriliyor. Elektrik alan şiddetini her bölge için bulunuz.



$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0} = \frac{\sum q}{\epsilon_0} = \frac{q_{net}}{\epsilon_0}$$

Gauss Yüzeyi 1:

r<a bölgesinde, r yarıçaplı ℓ uzunluklu bir silindir gauss yüzeyi alalım;

$$\oint \vec{E}_1\cdot d\vec{A}_1 = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0} = \Phi_1$$

$$\vec{E}_1(2\pi r\ell) = \frac{\lambda\ell}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\cdot\hat{r}\ \left(\frac{N}{C}\right)$$

Gauss Yüzeyi 2:

a<r<b bölgesinde,

$q_{net} = q_{çubuk} + q_{(r-a)}$

$$\left.\begin{aligned} q_r &= V_r\cdot\rho \\ q_r &= \pi r^2\ell\cdot\rho \\ q_a &= \pi a^2\ell\rho \end{aligned}\right\} \pi R^2 h = \text{silindirin hacmi}$$

$$E_2 = \frac{q_{çubuk} + q_{r-a}}{dA\cdot\epsilon_0}$$

$$= \frac{\lambda\ell + \rho(r^2-a^2)\pi\ell}{2\pi r\ell\epsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{(\lambda + \rho(r^2-a^2)\pi)\cancel{\ell}}{2\pi r\epsilon_0\cancel{\ell}}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\lambda + \rho\pi(r^2-a^2)}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\hat{r}\ \left(\frac{N}{C}\right)$$

Gauss Yüzeyi 3:

r>b bölgesinde

$q_{net} = q_{çubuk} + q(b-a)$

$$E_3(2\pi r\ell) = \frac{q_{çubuk}+q_{b-a}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda\ell + \rho\pi(b^2-a^2)\ell}{2\pi r\ell\epsilon_0} = \frac{\lambda + \rho\pi(b^2-a^2)}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\left(\frac{N}{C}\right)$$

17) R yarıçaplı sonsuz uzunluktaki silindirin hacimce yük yoğunluğu yarıçapa $\rho=\rho_o(a-(r/b))$ şeklinde bağlıdır. ρ_o, a ve b pozitif sabitler olup, r silindir ekseninden olan uzaklıktır. Gauss yasasını kullanarak;
a) r<R bölgesinde elektrik alanın büyüklüğünü bulunuz.
b) r>R bölgesinde elektrik alanın büyüklüğünü bulunuz.

a) $r < R$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(2\pi r \ell) = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

$$q_{iç} = \int_V \rho\, dV \Rightarrow \int_0^r \rho_0 \left(a - \frac{r}{b}\right) dV$$

$$\int_0^r \rho_0 \left(a - \frac{r}{b}\right) 2\pi r \ell\, dr$$

$$q_{iç} = \rho_0 2\pi \ell \left| \frac{ar^2}{2} - \frac{r^3}{3b} \right|$$

$$E = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} \left\{ a - \frac{2r}{3b} \right\} \ (N/C)$$

b) $r > R$

$$q_{iç} = \int \rho\, dV = \int_0^R \rho_0 \left(a - \frac{r}{b}\right) 2\pi r \ell\, dr$$

$$q_k = 2\pi \rho_0 \ell \left\{ a\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3b} \right\}$$

$$E = \frac{\rho_0 R^2}{2r\varepsilon_0} \left\{ a - \frac{2R}{3b} \right\} \ (N/C)$$

18) Toplam düzgün yük dağılımı Q olan kalın, yalıtkan bir boş kürenin iç yarıçapı R_1, dış yarıçapı R_2 'dir. $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ ve $r > R_2$ bölgelerinde elektrik alanlarını bulunuz.

$$\rho = Q / \left[\frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)\right]$$

$r < R_1$ bölgesinde Gauss Yasası ;

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Gauss yüzeyinin (r yarıçaplı küre yüzeyi) içinde yük bulunmadığından $E = 0$ bulunur.

$R_1 < r < R_2$ bölgesi için ;

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_1^3\right) / \varepsilon_0$$

$$E = \rho \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_1^3\right) / \left(4\pi\varepsilon_0 r^2\right)$$

$$\vec{E} = \left[Q\left(r^3 - R_1^3\right) / 4\pi\varepsilon_0\left(R_2^3 - R_1^3\right) r^2\right]\hat{r}$$

$R_2 < r$, bölgesinde ;

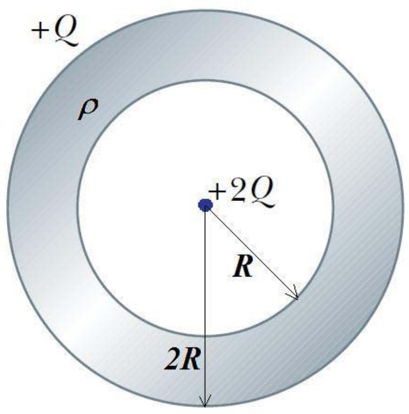
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad , \quad E = \left(Q / 4\pi\varepsilon_0 r^2\right)\hat{r} \quad \text{dır.}$$

19) Hacimsel yük yoğunluğu ρ ve toplam yükü $+Q$ olan içi boş yalıtkan bir kürenin merkezinde $+2Q$ yüklü noktasal bir yük vardır (Şekil 10).

a) $R<r<2R$ ve $r>2R$ bölgelerinde elektrik alan şiddetini k, Q, r ve R cinsinden bulunuz.

b) Aynı bölgeler için elektrik alan şiddetini, kürenin iletken olması halinde bulunuz.



Şekil 10

a) $$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0}$$

$R < r < 2R$ için (① bölgesinde)

$$E(4\pi r^2) = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0} = \frac{2Q + q_{küre}}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \left[2Q + \frac{Q}{7R^3}(r^3 - R^3)\right] \cdot \frac{1}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}\left[2Q + \frac{Q}{7R^3}(r^3 - R^3)\right]$$

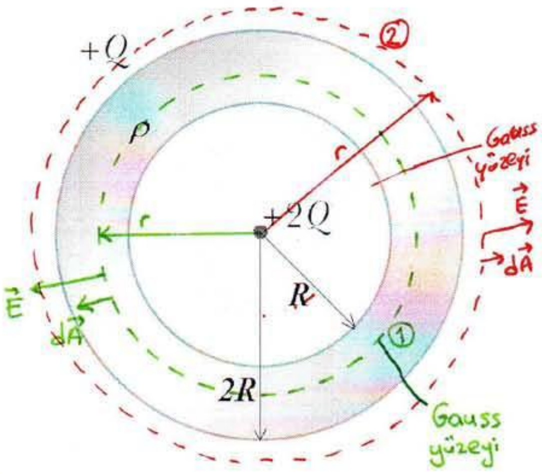
$$E = k\left(\frac{2Q}{r^2} + \frac{Qr}{7R^3} - \frac{Q}{7r^2}\right)$$

$$\boxed{E = \frac{kQ}{7}\left(\frac{13}{r^2} + \frac{r}{R^3}\right)}$$

$r > 2R$ için (② bölgesinde)

$$E(4\pi r^2) = \frac{2Q + Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q}{r^2} \quad , \quad \boxed{E = 3k\frac{Q}{r^2}}$$



$$q_{küre} = \frac{\frac{4}{3}\pi(r^3 - R^3) \cdot Q}{\frac{4}{3}\pi(7R^3)}$$

$$q_{küre} = \frac{Q}{7R^3}(r^3 - R^3)$$

$\frac{4}{3}\pi\left[(2R)^3 - R^3\right]$ hacimli küresel kabukta Q yükü bulunursa

$\frac{4}{3}\pi\left[r^3 - R^3\right]$ " $q_{küre}$ yükü bulunur.

b) $R < r < 2R$ için (① bölgesinde)

İletken içinde $E=0$; $q_{iç} = (q_{iç})_{yüzey} + 2Q$

$q_{iç} = -2Q + 2Q = 0$

$$E(4\pi r^2) = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0} = 0$$

$$\boxed{E=0}$$

$r > 2R$ için (② bölgesinde)

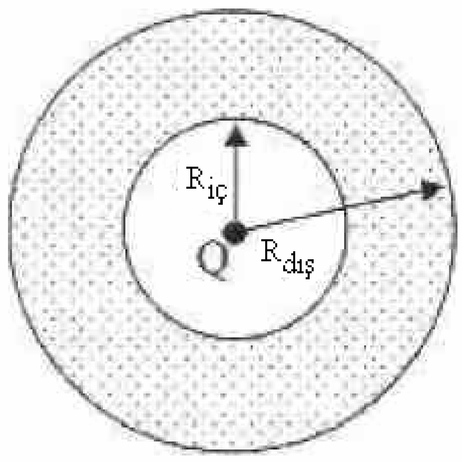
$$E(4\pi r^2) = \frac{2Q+Q}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{E = 3k\frac{Q}{r^2}}$$

20) Toplam yükü $+Q$ olan içi boş yalıtkan bir kabuğun merkezinde $+Q$ yüklü noktasal bir yük vardır (Şekil 11). Q= 4.0 nC, $R_{iç}$=2 cm ve $R_{dış}$=4 cm'dir. Kabuğun merkezinden

a) 3 cm mesafede,

b) 8 cm mesafede elektrik alan şiddetini bulunuz.



Şekil 11

a) $\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{iç}$

$$\varepsilon_0 E(4\pi r^2) = Q + \frac{\frac{4\pi}{3}(r^3 - R_{iç}^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_{dış}^3 - R_{iç}^3)}\, Q$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left\{1 + \frac{r^3 - R_{iç}^3}{R_{dış}^3 - R_{iç}^3}\right\}$$

$$= \frac{4.10^{-9}}{4\pi(8.85.10^{-12})(3.10^{-2})^2}\left\{1 + \frac{3^3 - 2^3}{4^3 - 2^3}\right\}$$

$$= 1.2 \times 10^5 \ N/C$$

b)

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{iç}$$

$$\varepsilon_0 E(4\pi r^2) = Q + Q$$

$$E = 2\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E = 1.1 \times 10^4 \ N/C$$

21) İç yarıçapı $2R$, dış yarıçapı $3R$ olan iletken küresel bir kabuğun toplam yükü $+4Q$'dır. Küresel kabukla aynı merkezli, yarıçapı R olan yalıtkan bir kürenin toplam yükü $+2Q$'dır. Yalıtkan kürenin yük yoğunluğu düzgün olmayıp $\rho = \alpha r$ bağıntısına göre değişmektedir. Burada α, pozitif bir sabit ve r ise orijinden olan radyal uzaklıktır.

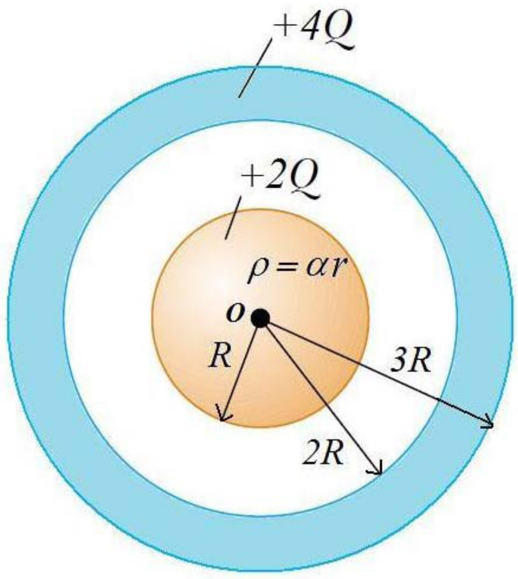
a) α sabitini Q ve R cinsinden bulunuz.

b) $r<R$

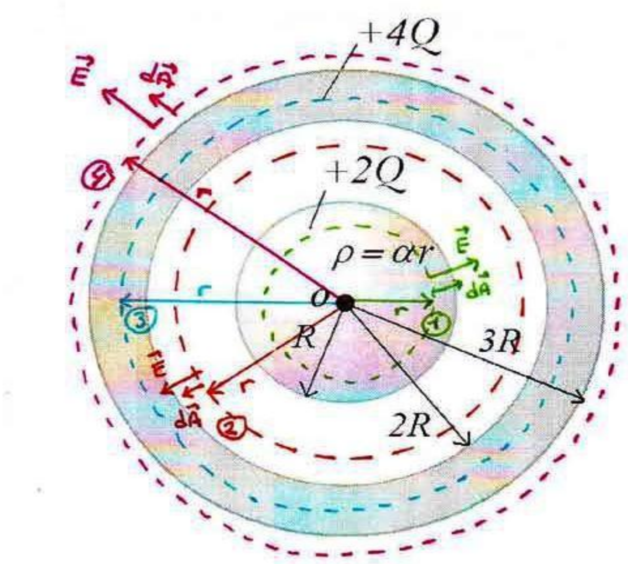
c) $R<r<2R$

d) $2R<r<3R$

e) $r>3R$ bölgelerindeki elektrik alan şiddetini k, Q, r ve R cinsinden bulunuz.



Şekil 12



a) $dQ = \rho\, dV \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\int_0^{2Q} dQ = \int_0^R (\alpha r) 4\pi r^2 dr \qquad dV = 4\pi r^2 dr$

$Q\Big]_0^{2Q} = 4\pi\alpha \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$

$2Q = \pi \alpha R^4$

$\boxed{\alpha = \frac{2Q}{\pi R^4}}$

b) $\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0} \qquad q_{iç} = \int \rho\, dV$

$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r (\alpha r) 4\pi r^2 dr$

$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi\alpha \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^r$

$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{4\pi}{r^2}\ \frac{2Q}{\pi R^4}\cdot\frac{r^4}{4}$, $\boxed{E = 2k\frac{Q r^2}{R^4}}$ $r<R$

c) $E(4\pi r^2) = \frac{2Q}{\epsilon_0}$

$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{2Q}{r^2}$, $\boxed{E = 2k\frac{Q}{r^2}}$ $R<r<2R$

d) $E(4\pi r^2) = \dfrac{2Q - 2Q}{\epsilon_0}$ $\qquad q_{iç} = 2Q + \underbrace{(q_{iç})_{yüzey}}_{-2Q}$

$\boxed{E=0}$ $\quad 2R < r < 3R$

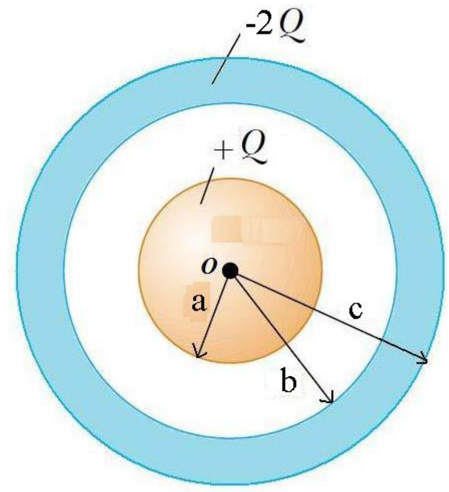
e) $E(4\pi r^2) = \dfrac{4Q + 2Q}{\epsilon_0}$

$\boxed{E = 6k\dfrac{Q}{r^2}}$ $\quad r > 3R$

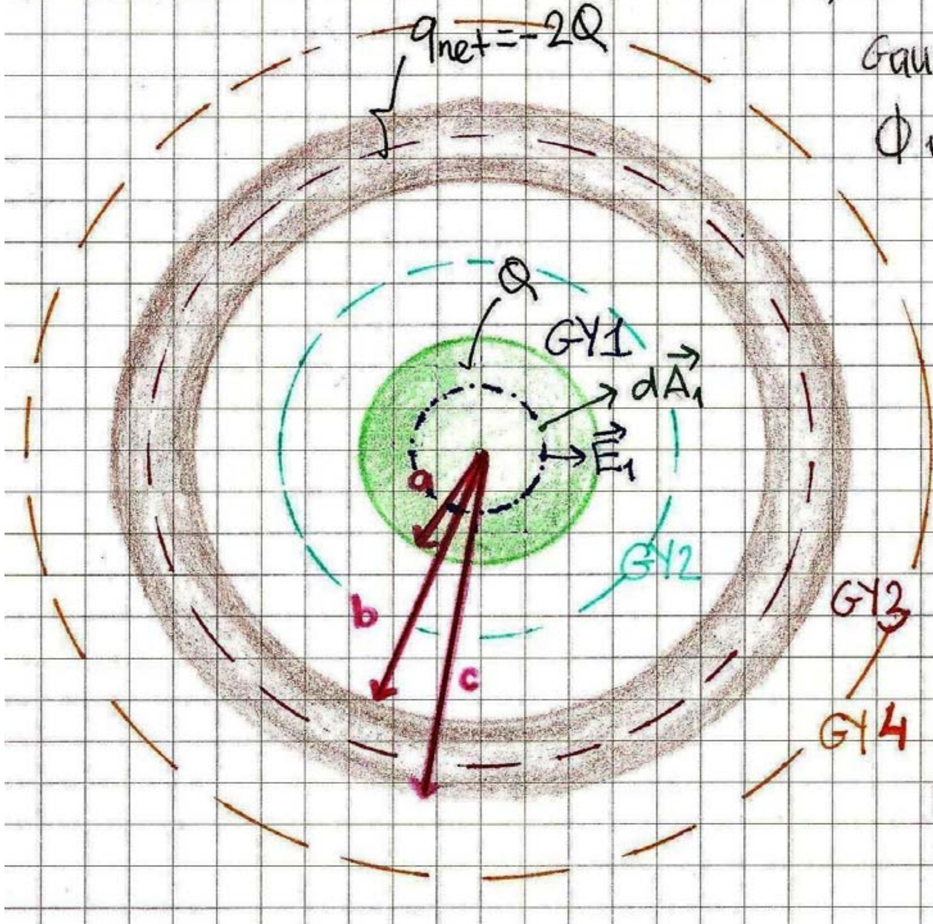
22) a yarıçaplı toplam yükü +Q olan yalıtkan dolu bir kürenin yük yoğunluğu ρ'dur. Bu kürenin dışında şekildeki gibi aynı merkezli iç yarıçapı b, dış yarıçapı c olan küresel iletken bir tabakanın net yükü -2Q'dur (Şekil 13).

a) r<a, a<r<b ve r>c bölgelerindeki elektrik alan şiddetini ve yönünü bulunuz.

b) İletken tabakanın iç ve dış yüzeylerindeki yük yoğunluklarını bulunuz.



Şekil 13



a) r<a bölgesinde;

Gauss Yüzeyi 1

$\Phi_1 = \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{A}_1$

$= \oint E_1 dA_1 \cos 0^\circ$

Yalıtkan kürenin içerisindeki net yük $= q_{iç}$

$q_{iç} = \rho V_{iç}$

$= \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \; (C)$

$$\left[q_{iç} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{Q r^3}{a^3} \right]$$

$$\Phi_1 = \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = E_1 \oint dA_1 = E_1 \cdot 4\pi r^2 = \Phi_E = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{\frac{q_{iç}}{\epsilon_0}}{4\pi r^2} = \frac{4/3\,\pi \rho r^3}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \left(\frac{N}{C}\right)$$, dışa doğru.

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \cdot \hat{r} \left(\frac{N}{C}\right)$$

* $b<r<a$ bölgesinde,

Gauss yüzeyi 2,

$\Phi_{E2} = E_2 \oint dA = \frac{q}{\epsilon_0}$ $\quad E_2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$ $\quad \vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}\hat{r} \left(\frac{N}{C}\right)$

* $c>r>b$ bölgesinde,

Gauss yüzeyi 3,

$q_{iç} = 0 \quad E_3 = 0$

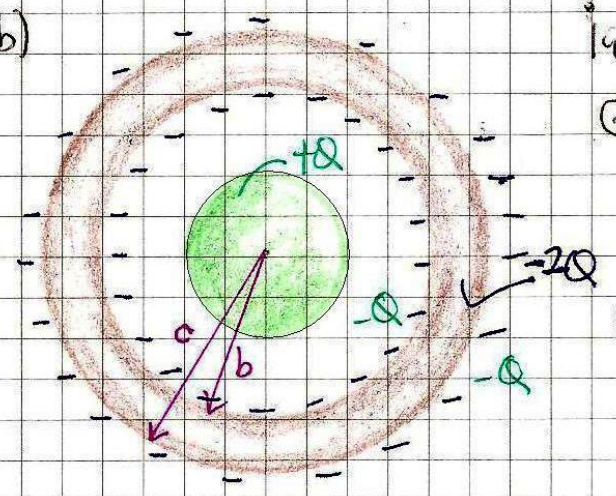
Elektrostatik dengedeki iletkenlerin içinde elektrik alan sıfırdır.

* $r>c$ bölgesinde,

Gauss yüzeyi 4,

$E_4 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \left(\frac{N}{C}\right)$

b)



İç yüzey $-Q$ yüklü;

$\sigma_b = \sigma_{iç} = \frac{Q}{A} = \frac{-Q}{4\pi b^2} \left(\frac{C}{m^2}\right)$

Dış yüzey $-Q$ yüklü,

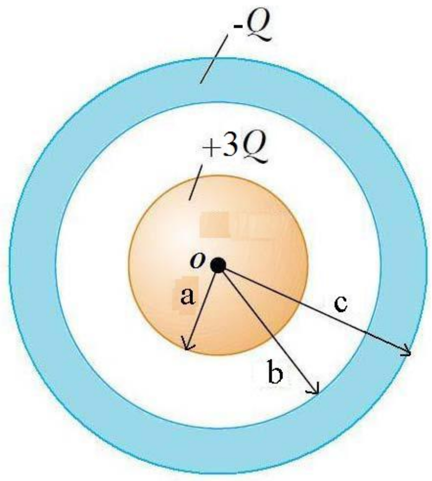
$\sigma_c = \sigma_{dış} = \frac{Q}{A} = \frac{-Q}{4\pi c^2} \left(\frac{C}{m^2}\right)$

23) a yarıçaplı içi dolu yalıtkan bir kürenin hacmine $3Q$ yükü düzgün olarak dağıtılmıştır. Bu küre ile aynı merkezli iç yarıçapı b, dış yarıçapı c olan iletken bir küre tabakasında Şekil 14'deki gibi $-Q$ net yükü bulunmaktadır.

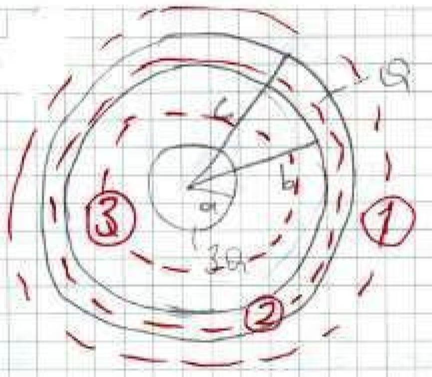
a) $r< a$, $b> r> a$, $c> r> b$, $r> c$ bölgeleri birer gauss yüzeyi çizerek, yüzeyin çevrelediği net yükü ve elektrik alanı hesaplayınız.

b) İletken tabakanın iç ve dış yüzeyindeki yükü bulunuz.

c) Elektrik alan büyüklüğünün r'ye bağlı grafiğini çiziniz.



Şekil 14



a) $r>c$ $\quad Q_{iç} = 3Q - Q$ (1)

$= 2Q$

$Q_{iç} > 0$ küresel simetri nedeniyle dışa doğrudur

$$E = k\frac{2Q}{r^2}$$

c> r> b iletken içinde $E=0$, $q_{iç}=0$

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} \Rightarrow q_{iç} = \varepsilon_0 \Phi_E = 0$$

b> r> a $Q_{iç} = 3Q \quad E = k\frac{3Q}{r^2}$ dışa doğru

r< a $q_{iç} = \rho V \quad \rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$

$$q_{iç} = \frac{3Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$q_{iç} = 3Q\frac{r^3}{a^3}$$

$$E = k\frac{Q}{r^2} = \frac{k}{r^2}\left(3Q\frac{r^3}{a^3}\right)$$

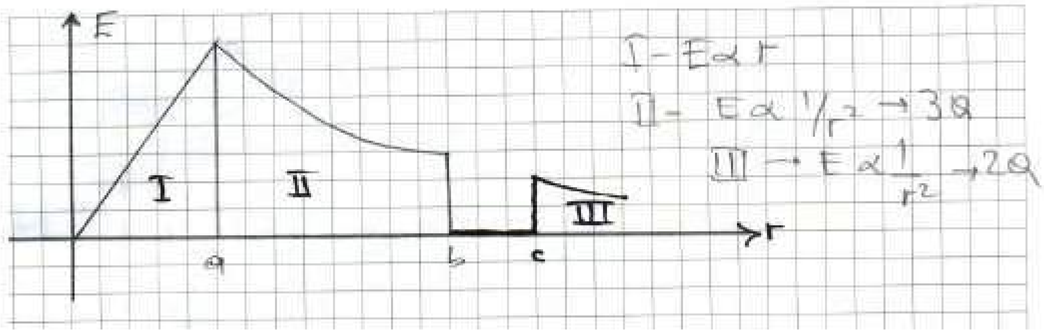
$$E = \frac{3kQr}{a^3}$$ radyal dışa doğru

b) $b<r<c \quad E=0 \quad q_{iç} = 3Q + q_{iç}^{yüzey} = 0$

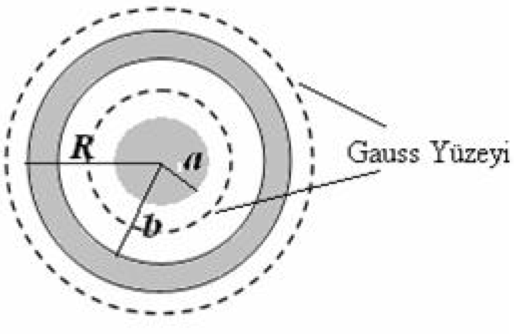
$$q_{iç}^{yüzey} = -3Q$$

$$q_{net} = q_{dış}^{yüzey} + q_{iç}^{yüzey} = -Q$$

$$q_{dış}^{yüzey} = -Q + 3Q = 2Q$$



24) Yarıçapı *a* olan bir metal küre, iç yarıçapı *b*, dış yarıçapı *R* olan küresel kabuk içine Şekil 15'deki gibi yerleştirilmiştir. a ile *b* arasında bulunan bir küresel Gauss yüzeyinden geçen akı Q/ε_0 ve *R* 'nin hemen dışındaki küresel Gauss yüzeyinden geçen akı $2Q/\varepsilon_0$ dır. Kürelerin toplam yükünü bulunuz. Yükler nerede bulunur ve yük yoğunlukları ne olur?



Şekil 15

$$\Phi_1 = \frac{Q_{iç}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_2 = (Q_{iç} + Q_{dış})/\varepsilon_0 = \frac{2Q}{\varepsilon_0}$$

$Q_{iç} = Q$ olduğuna göre kabuktaki yük Q dur

$b < r < R$ bölgesinde $E = 0$ olması gerektiğinden, buradan geçen bir Gauss yüzeyinin içindeki net yükün sıfır olması gerekir. Kabuğun iç yüzeyinde $-Q$ kadar toplanmış olmalıdır. Kabuktaki toplam yük $+Q$ olduğundan, dış yüzeyde de $+2Q$ toplanmalıdır.

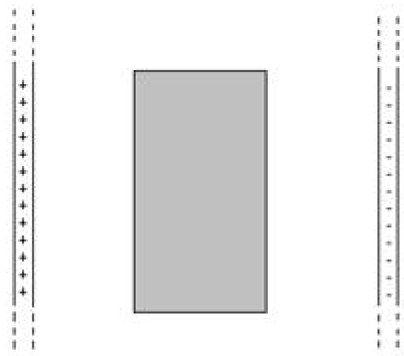
Buna göre,

$\sigma_a = Q/(4\pi a^2)$ $\sigma_b = -Q/(4\pi b^2)$ ve $\sigma_R = 2Q/(4\pi R$

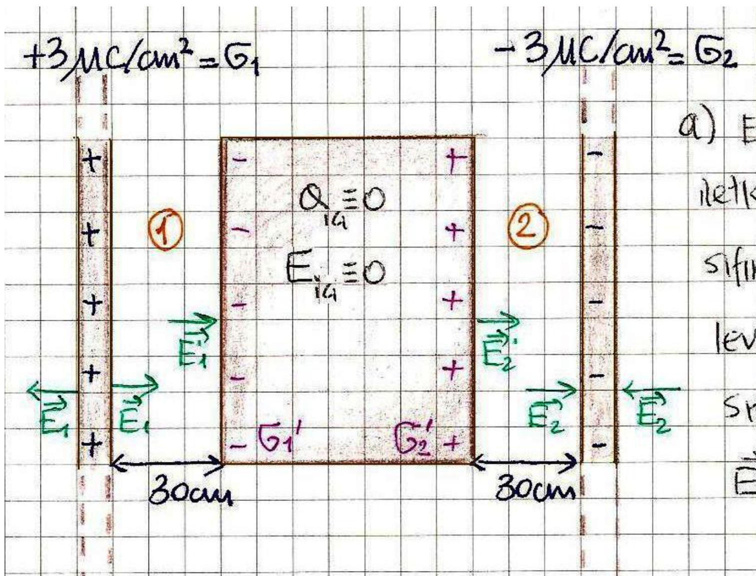
bulunur.

25) Şekil 16'da üç çok büyük levha birbirlerinden eşit ve 30 cm uzakta bulunmaktadır. Birinci ve üçüncü levhalar çok ince, yalıtkan ve her ikisinin de yüzey yük yoğunlukları sırasıyla +3 μC/cm^2 ve -3 μC/cm^2'dir. Ortadaki levha iletkendir ve net yükü sıfırdır. Elektrik alanı;

a) Ortadaki levhanın içinde,
b) Soldaki ve ortadaki levha arasında,
c) Ortadaki ve sağdaki levha arasında,
d) Ortadaki levhanın soldaki levha tarafında,
e) Ortadaki levhanın sağdaki levha tarafında, yük yoğunluğu ne kadardır?



Şekil 16



a) Elektrostatik dengedeki iletkenlerin içindeki net yük sıfır olduğundan, ortadaki levha içindeki elektrik alan sıfırdır.

$\vec{E}_{levha} = 0$

b) soldaki ve ortadaki levha arasında, yani ① bölgesinde;

$$\vec{E}_{1_{toplam}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\vec{i}) + \frac{\sigma}{\epsilon_0}(\vec{i}) = \frac{3\sigma}{2\epsilon_0}(\vec{i})$$

İletkenlerin çok yakınındaki noktalarda elektrik alan $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$'dır.

Yalıtkanlarda ise $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$'dır.

c) Ortadaki ve sağdaki levha arasında, yani ② bölgesinde;

$$E_{2_{toplam}} = \frac{3\sigma}{2\epsilon_0}$$

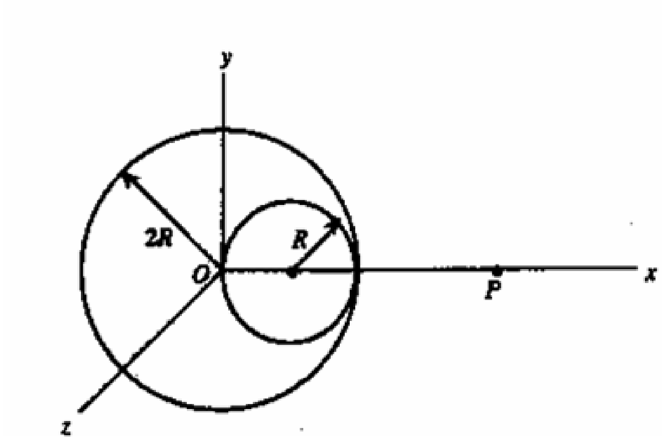
d) Ortadaki levhanın sol tarafında yük yoğunluğu, $\sigma_1' = -\sigma_1 = -3\frac{\mu C}{cm^2}$

e) Ortadaki levhanın sağdaki levha tarafında yük yoğunluğu, $\sigma_2' = -\sigma_2 = 3\frac{\mu C}{cm^2}$

26) 2R yarıçaplı, hacmine ρ yük yoğunluğu düzgün yayılmış bir küre içinde R yarıçaplı bir küresel oyuk açılmıştır (Şekil 17).

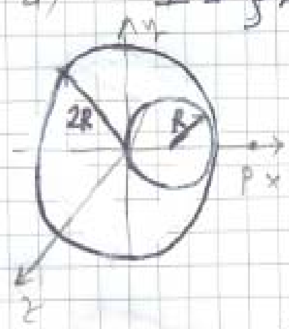
a) Orijini merkez alan 4R yarıçaplı küresel yüzeyden geçen elektrik akıyı bulunuz.

b) Üst üste binme kavramını kullanarak a şıkkında Gauss yüzeyinde bir P (4R,0) noktasında elektrik alanın yön ve şiddetini bulunuz.



Şekil 17

a) $\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$



$$q_{iç} = \rho\left(\frac{4}{3}\pi(2R)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$q_{iç} = \rho\left(\frac{28}{3}\pi R^3\right)$$

$$\Phi = \frac{28}{3\varepsilon_0}\rho\pi R^3$$

b) R yarıçaplı oyuk $-\rho$ yük yoğunluklu yalıtkan küre gibi davranır;

$$\vec{E} = \vec{E}_\rho + \vec{E}_{-\rho} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\hat{r} \qquad q_\rho = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi(2R)^3$$

$$q_{-\rho} = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

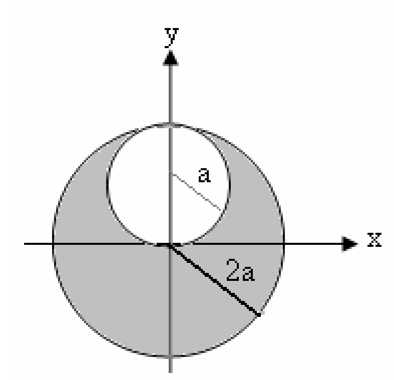
$$\vec{E} = k\frac{\rho\frac{4}{3}\pi(2R)^3}{(4R)^2}\hat{i} + k\frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{(3R)^2}(-\hat{i})$$

$$= k\frac{4}{3}\pi\rho\left(\frac{8R^3}{16R^2}\hat{i} + \frac{R^3}{9R^2}(-\hat{i})\right)$$

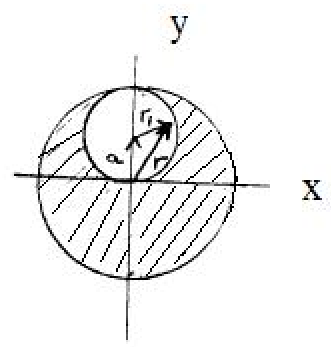
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi\rho\left(\frac{R}{2}\hat{i} - \frac{R}{9}\hat{i}\right)$$

$$= \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}\frac{7}{18}\hat{i} \rightarrow \vec{E} = \frac{7}{54}\frac{\rho R}{\varepsilon_0}\hat{i}$$

27) 2a yarıçaplı yalıtkan kürenin düzgün ρ hacimsel yük yoğunluğu vardır. (Yalıtkan maddenin elektrik alanı etkilemediğini varsayınız.). Şekil 18'deki bu küreden a yarıçaplı bir küre çıkarılarak bir oyuk oluşturuluyor. Bu oyuk içinde elektrik alanın düzgün ve $E_x = 0$ ve $E_y = \rho a / 3\varepsilon_0$ ile verildiğini gösteriniz.



Şekil 18



Oyuk içinde bileşke alan,

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

E_+ : 2a yarıçaplı pozitif yüklü düzgün kürenin elektriksel alanı,

E_- : oyuğun merkezinde bulunan a yarıçaplı negatif yükün ürettiği alanı temsil etsin.

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\varepsilon_0} = 4\pi r^2 E_+$$

$$\vec{E}_+ = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} = \frac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0}$$

$$-\frac{4}{3}\frac{\pi r_1^3 \cdot \rho}{\varepsilon_0} = 4\pi r_1^2 E_-$$

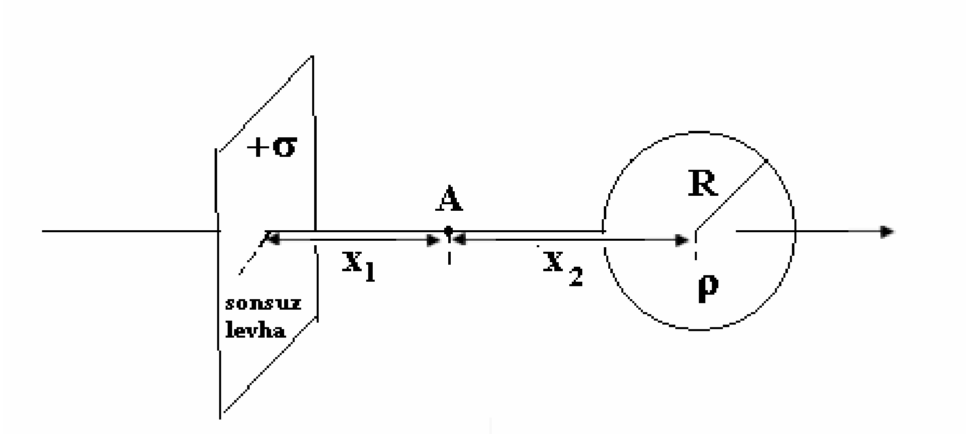
$$\vec{E}_- = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0}(-\hat{r}_1) = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1$$

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}_1 \rightarrow \vec{E}_- = \frac{-\rho(\vec{r}-\vec{a})}{3\varepsilon_0}$$

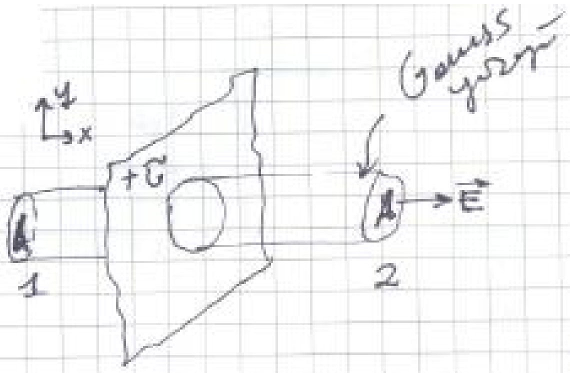
$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho\vec{a}}{3\varepsilon_0} = 0\vec{i} + \frac{\rho a}{3\varepsilon_0}\vec{j}$$

$E_x = 0 \qquad E_y = \dfrac{\rho a}{3\varepsilon_0}$ (Oyuk içinde her noktada)

28) Şekil 19'daki sistemin A noktasında oluşturduğu elektrik alanın sıfır olabilmesi için kürenin yük yoğunluğu ne kadar olmalıdır?



Şekil 19

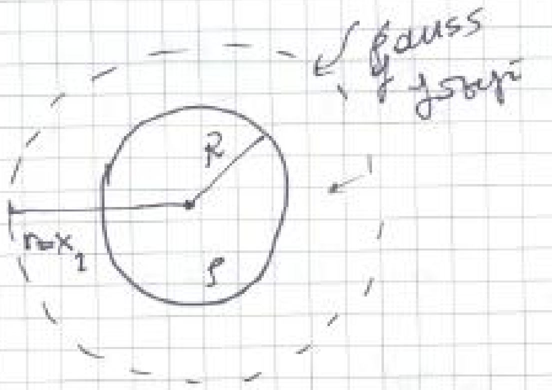


$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

$$E\oint_1 dA + E\oint_2 dA = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} \qquad q = \sigma . A$$

$$2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_{lev} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}$$



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

$$E . 4\pi r^2 = \frac{\rho V}{\varepsilon_0}$$

$$E . \cancel{4\pi} x_2^2 = \frac{\rho \frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi} R^3}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_{küre} = -\rho \frac{R^3}{3x_2^2\varepsilon_0}\hat{i}$$

$$E_T = 0 \Rightarrow \vec{E}_{lev} + \vec{E}_{küre} = 0$$

$$\frac{\sigma}{2\cancel{\varepsilon_0}} = \rho\frac{R^3}{3x_2^2\cancel{\varepsilon_0}}$$

$$\rho = \frac{3\sigma x_2^2}{2R^3}$$